

# Índice

---

Índice.....	1
Motivação.....	2
Introdução.....	3
Capítulo 1.....	4
1.1 Fundamentos:.....	4
1.2 Transmissão Digital.....	5
1.3 DFT.....	11
1.3.1 Propriedades da DFT.....	12
1.3.2 FFT.....	14
Capítulo 2:.....	17
OFDM:.....	17
Capítulo 3.....	19
ADSL:.....	19
Capítulo 4.....	22
HDTV Digital:.....	22
Histórico:.....	22
Modulação COFDM:.....	23
Capítulo 5.....	24
Wavelets Contínuas.....	24
Capítulo 6.....	28
Wavelet Discreta.....	28
Capítulo 7.....	32
Corpo Finito.....	32
Capítulo 8.....	34
8.0 Wavelet sobre um corpo finito.....	34
8.1 Aplicações em CDMA.....	36
8.2 Aplicações em ADSL/HDTV.....	38
8.3 Conclusões.....	38
Apêndice A.....	40
Dificuldades encontradas.....	40
Atividades Paralelas Desenvolvidas Pelo Bolsista.....	40
Artigos Publicados/ Trabalhos Apresentados:.....	40
Anexo I.....	41
Bibliografia.....	42

## Motivação

---

O número de aplicações da técnica OFDM vem crescendo dia a dia e novas versões derivadas do sistema OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplex*) clássico vem surgindo. Aplicações recentes que adotam o OFDM são: internet banda larga por ADSL (*Assymetric Digital Subscriber Line*) e HDTV (*High Definition Television*) Digital.

A internet em banda larga começa a se disseminar gradativamente em locais aonde são disponibilizados diferentes tecnologias de acesso, incluindo o ADSL ou *cable MODEMs*. O movimento de banda estreita gratuita certamente contribui para acelerar o interesse no acesso em banda larga.

O principal empecilho na adoção de tecnologias é na instalação e parcialmente pelo custo. No Brasil, estas tecnologias já estão disponíveis. Os acessos em Rede de Cabos já estão disponibilizados por diversas redes como a Virtua, Globo Cabo e a TVA. A ADSL é dirigida a usuários que desejam acesso dedicado a web em alta velocidade. A Telemar e a Telefônica já disponibilizam esta tecnologia a seus clientes.[18][19]

No Brasil a ADSL foi lançado pela Telefônica (Speedy), em São Paulo em Janeiro de 2000. O acesso vem atraindo um grande número de assinantes, maior do que a expectativa inicial dos provedores de acesso. As placas ADSL suportam 512 kbps *upstream* e 1,5 Mbps de *downstream*, dispensando as instalações de splitters. Nos Estados Unidos, 12% dos internautas conectam-se a net em velocidades superiores aos usuais 56 kbps. O número ainda é considerado modesto, mas vem crescendo rapidamente. Dados da Nielsen/NetRatings mostram que em 2000 o número de usuários que aderiram a tecnologia ADSL aumentou em 148%.[11]

Alguns projetos começam a surgir com o objetivo de aproveitar ao máximo o potencial da banda larga em setores bem específicos, como, por exemplo, a sala de aula. A idéia é oferecer uma solução completa, que inclui conteúdo e acesso, para todas as escolas interessadas em utilizar a internet como recurso educacional.[1]

Outra das aplicações relevantes da modulação OFDM está nos padrões de TV em alta definição – HDTV digital. No Brasil sua implantação está sendo polêmica. Quem coordena a padronização no Brasil é a ANATEL (Agência Nacional de Telecomunicações). Os testes dos sistemas estão sendo gerenciados pela universidade de Mackenzie e a validação dos testes pelo CPqD e o grupo SET/Abert (Sociedade Brasileira de Engenharia de Televisão e Associação Brasileira de Emissores de Rádio e Televisão). Os testes, realizados na cidade de São Paulo, avaliaram os três padrões de TV Digital: o americano ATSC (*Advanced Television Systems Committee*), o europeu DVB-T (*Digital Video Broadcasting Terrestrial*) e o japonês ISDB-T (*Integrated Services Digital Broadcasting Terrestrial*). No relatório preliminar entregue pela Abert/Set, em fevereiro 2000, foi avaliada a modulação dos três padrões. O grupo concluiu que a modulação COFDM (*Coded Orthogonal Frequency Multiplex*), uma versão da OFDM, usada nos padrões europeu e japonês, seria a opção usada no Brasil. Apenas a tecnologia ficou a ser definida, embora tudo indique que seja o europeu.[5]

Sistemas OFDM são baseados em transformadas discretas, entretanto, todas as transformadas discretas utilizadas até agora são versões discretas de transformadas contínuas. O principal intuito deste trabalho foi iniciar uma investigação sobre a possibilidade de adaptar transformadas definidas em estruturas de corpo finito (transformadas digitais), no contexto de OFDM com possíveis aplicações nas tecnologias promissoras ADSL e HDTV.

## Introdução

---

Este trabalho propõe uma nova investigação da aplicação de sistemas com portadora múltipla OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplex*) nos contextos de acesso em alta velocidade a Internet via ADSL (*Asymmetric Digital Subscriber Line*) e sistemas de Televisão HDTV Digital.

Nosso objetivo é o de estudar os sistemas de modulação multi-portadora OFDM e investigar a introdução de transformadas de corpo finito ao invés da transformada discreta de Fourier como um meio de realizar um sistema multi-portador similar ao OFDM, porém com uma maior eficiência espectral, pois se trata de uma multiplexação digital. Por último verificar a potencial aplicabilidade destes novos sistemas em modems ADSL e televisores digitais, que já adotam o sistema OFDM.

Com a demanda inesgotável por taxas de transmissão cada vez mais elevadas e com as atuais limitações no espectro, a maior parte dos canais tende hoje a comportarem-se como canais na região limitada em banda, exceto nas comunicações em fibra óptica. A proposta de um novo sistema com melhor eficiência espectral torna-se então um grande atrativo.

Pensando nisto, este trabalho aborda em seu primeiro capítulo as teorias e fundamentos necessários para o leitor poder se familiarizar com o assunto.

O capítulo 2 aborda o tema OFDM. Será mostrada a técnica de modulação multi-portadora e as propriedades desta tecnologia, a tornando tão importante na aplicação em ADSL e HDTV, assuntos abordados nos dois capítulos seguintes.

Nos capítulos 5 e 6 abordaremos a Transformada Wavelet contínua e a discreta, respectivamente, mostrando as suas possíveis aplicações no dia-a-dia.

Após o leitor estar familiarizado com a tecnologia OFDM, ADSL e HDTV abordaremos no capítulo 7 o conceito de Corpo Finito, capítulo de extrema importância neste trabalho, pois fornecerá a base para o entendimento do tema proposto: o uso de Transformada Wavelet **sobre um corpo finito** com possíveis aplicações nas tecnologias acima descritas.

Por último, no capítulo 8, será mostrado o sistema proposto pelo autor, as suas possíveis aplicações e as vantagens deste sistema quando comparado com os sistemas existentes no mercado.

Na seção Apêndice A, as dificuldades encontradas no desenvolvimento deste trabalho são mencionadas, bem como as atividades paralelas desenvolvidas pelo autor no período da pesquisa.

Na seção ANEXO, pode-se encontrar provas de alguns teoremas mencionados no decorrer deste trabalho e podem servir como auxílio na compreensão do texto.

Na seção Bibliografia, as referências bibliográficas usadas para a elaboração deste trabalho servirão como um complemento para leitores interessados no tema.

## Capítulo 1

### 1.1 Fundamentos:

Antes de nos aprofundarmos no tema principal deste trabalho, será necessário um prévio entendimento dos fundamentos desta idéia: OFDM. Para isto é necessário retroceder um pouco no tempo para sabermos de onde surgiu a idéia de tais sistemas.

Suponha agora que nosso objetivo é o de transmitir  $N$  sinais provenientes de usuários distintos, de um ponto a outro. Para manter o custo da transmissão o mais baixo possível é necessário que os sinais sejam transmitidos num mesmo canal ao mesmo tempo. O processo que possibilita que vários sinais possam ser enviados, ao mesmo tempo, num só canal, é chamado de multiplexação. Existem diferentes técnicas de multiplexação sendo as mais importantes a multiplex por divisão em freqüência, por divisão no tempo e por divisão em códigos.

Se cada um dos sinais a serem transmitidos tem uma largura de banda  $B$ , eles serão transmitidos em “envelopes” de freqüências que diferem entre si por uma quantidade maior ou igual a  $2B$ . Este tipo de multiplexação é chamado de FDM (*Frequency Division Multiplexing*). Para que sinais sejam transmitidos a longas distâncias, o envelope tem que corresponder a um sinal variante no tempo. O caso trivialmente usado é uma portadora cossenoidal. O esquema da multiplexação por divisão de freqüência pode ser visto na *figura 1*.

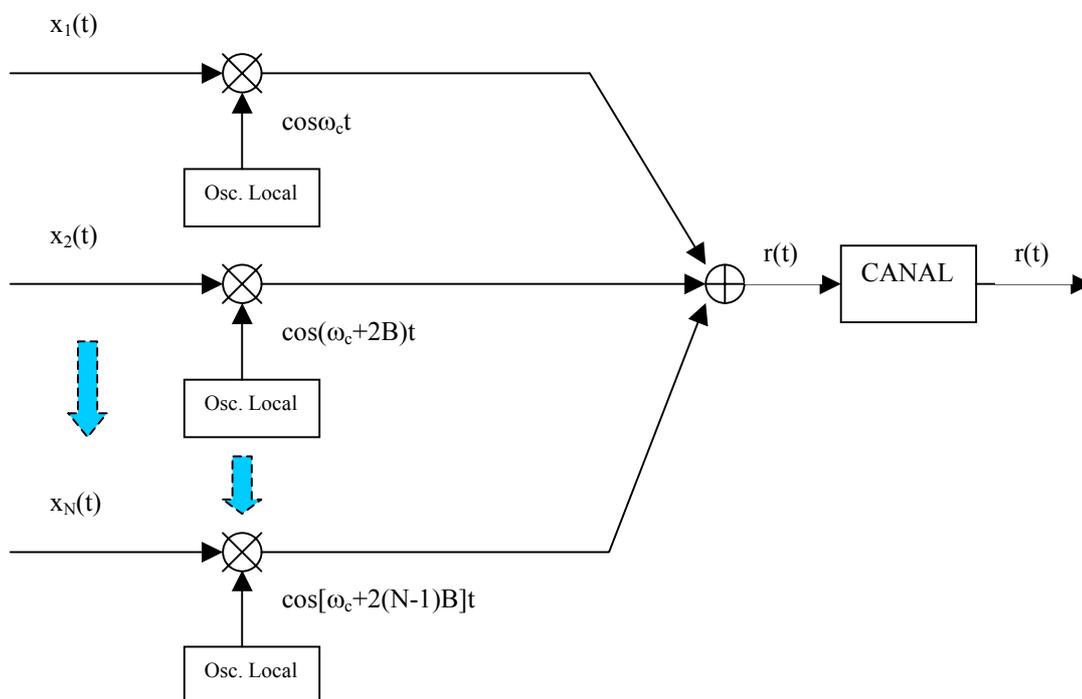


Figura 1. Esquema de Multiplexação FDM.

Em FDM os dados são enviados serialmente e são deslocados de  $\omega_c$ , não havendo superposição entre sinais consecutivos, como pode ser visto na *figura 1.1*.

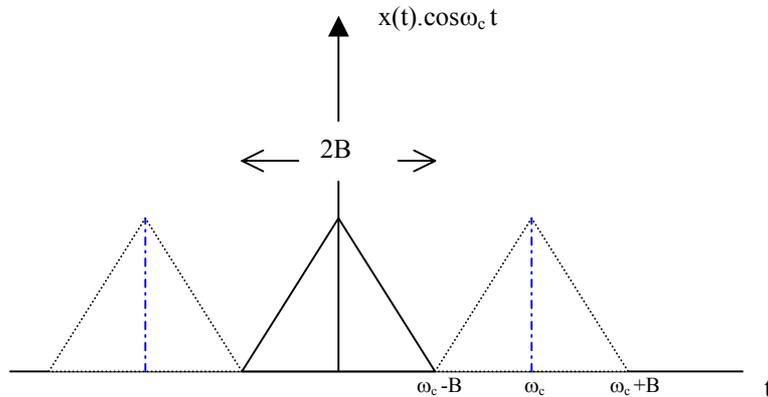


Figura 1.1 Espectro típico de sinais em sistemas FDM.

O número de sinais que podem ser transmitidos simultaneamente usando FDM depende da frequência  $\omega_c$ , da portadora  $\cos(\omega_c + 2iB)t$  e da largura de banda do canal. Com a evolução da tecnologia a demanda cresceu bastante e a largura do canal tem que ser aproveitada ao máximo. Pode-se claramente ver que com a FDM isto não ocorre, pois tem-se que esperar que um sinal seja totalmente transmitido para que o outro comece a ser. Foi este dilema que levou ao estudo aprofundado de meios de modulação que permitissem superposições de sinais consecutivos sem que estes interferissem uns com os outros.

Com isto haveria uma otimização do canal transmissor. Foi a partir dessa idéia, em meados da década de 60 que Chang [R.W. CHANG] introduziu a idéia inicial da multiplexação ortogonal.

## 1.2 Transmissão Digital

Assumindo que os dados são transmitidos em formas de pulsos, ou seja, digitalmente.[24] Teremos então o diagrama de blocos a seguir:

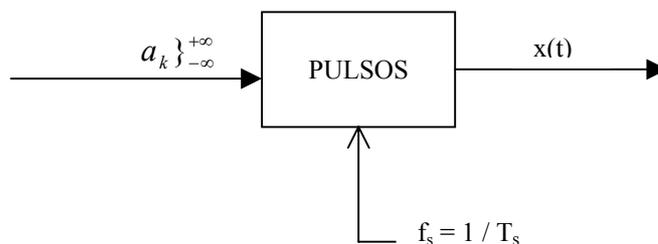


Figura 1.2 – Diagrama em blocos de uma transmissão digital

Temos então:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k \cdot u(t - kT_s)$$

Onde  $u(t)$  é a função impulso. Neste caso não haverá interferência de um  $a_{k+1}$  para um  $a_k$ . A desvantagem, novamente, seria a ocupação demasiada da largura do canal. E mesmo que o canal fosse infinitamente largo, na prática esse sinal não se comportaria tão facilmente assim. Isto porque, ao passar pelo canal de transmissão, que funciona como um filtro de função de transferência  $h(t)$ , a saída passa a ser então a convolução do sinal de entrada com o  $h(t)$  do filtro.

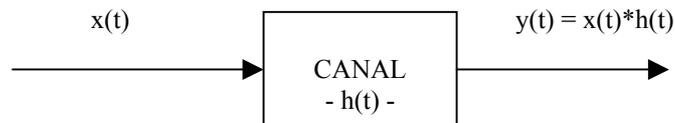


Figura 1.3 – Convolução da função  $f(t)$  com a resposta ao impulso do filtro,  $h(t)$ .

Começaremos então nossa análise. Chamaremos  $p(t)$  a convolução da função impulso com  $h(t)$ .

$$p(t) = u(t) * h(t)$$

Nosso sinal:  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k \cdot u(t - kT_s)$ , ao passar pelo canal fica:

$$y(t) = u(t) * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k \cdot p(t - kT_s) \quad \text{onde:} \quad p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T_s \\ 0, & \text{outrem} \end{cases}$$

Agora começam a surgir os problemas com interferência. Vamos analisar nossa saída a cada  $mT_s$  segundos.

$$y(mT_s) = \sum a_k \cdot p(mT_s - kT_s) = \sum a_k \cdot p[T_s \cdot (m - K)]$$

$$y(mT_s) = \underbrace{a_m \cdot p(0)}_{m=K} + \sum_{m \neq K} a_k \cdot p[T_s \cdot (m - K)]$$

ISI: Inter-Symbolic Interference 

O ISI, ou também conhecido como IES (Interferência Entre Símbolos), é a interferência causada pela superposição de sinais em intervalos adjacentes. Como o que nos interessa são os valores nos intervalos múltiplos de  $T_s$  (período de amostragem), essa interferência pode nos causar muito transtorno, pois nesses pontos os sinais podem se somar ocasionando erros.

Nyquist foi o primeiro a propor um modo de tentar anular a IES. Se possível, seria uma revolução nas comunicações, pois poderia-se então enviar vários sinais superpostos, aproveitando ao máximo a banda passante, sem que essas superposições gerassem interferência.

Chamando  $L = m \cdot K$ . O que Nyquist propôs foi criar um filtro que tivesse a seguinte característica:

$$p(LT_s) = \begin{cases} 0, & L \neq 0 \\ p(0), & L = 0 \end{cases}$$

Com esse filtro a interferência causada pelos  $a_k$ 's adjacentes seria zero nos tempos de nosso interesse,  $LT_s$ .

O que Nyquist usou foi:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B P(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega, \text{ onde } P(\omega) \text{ é banda limitada, ou seja: para } |\omega| > B \Rightarrow |P(\omega)|=0.$$

Pelo Teorema da Amostragem<sup>1</sup>:

$$p(t) = \sum p\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\text{sen } 2\pi B(t - n/2B)}{2\pi B(t - n/2B)}$$

Nyquist notou que se fizéssemos  $T_s = 1/2B$ <sup>2</sup> a expansão em séries de  $p(t)$  ficaria:

$$p(t) = \sum p(nT_s) \cdot \frac{\text{sen } \pi(t - nT_s)/T_s}{\pi(t - nT_s)/T_s}$$

Para evitarmos IES,  $p(nT_s)$  tem que ser zero em  $nT_s$ , para todo  $n$ , exceto quando  $n = 0$ . Ficamos então com:

$$p(t) = \frac{\text{sen } \pi t / T_s}{\pi t / T_s}, \text{ cujo par transformada vale:}$$

$$P(\omega) = \begin{cases} T_s, & |f| \leq 1/2T \\ 0, & |f| \geq 1/2T \end{cases}$$

A representação espectral pode ser vista na *figura 1.4(a)*. A representação temporal pode ser vista na *figura 1.4(b)*.

<sup>1</sup> Vide *Anexo I* para a prova do teorema de amostragem

<sup>2</sup> Conhecido como “Período de Nyquist”

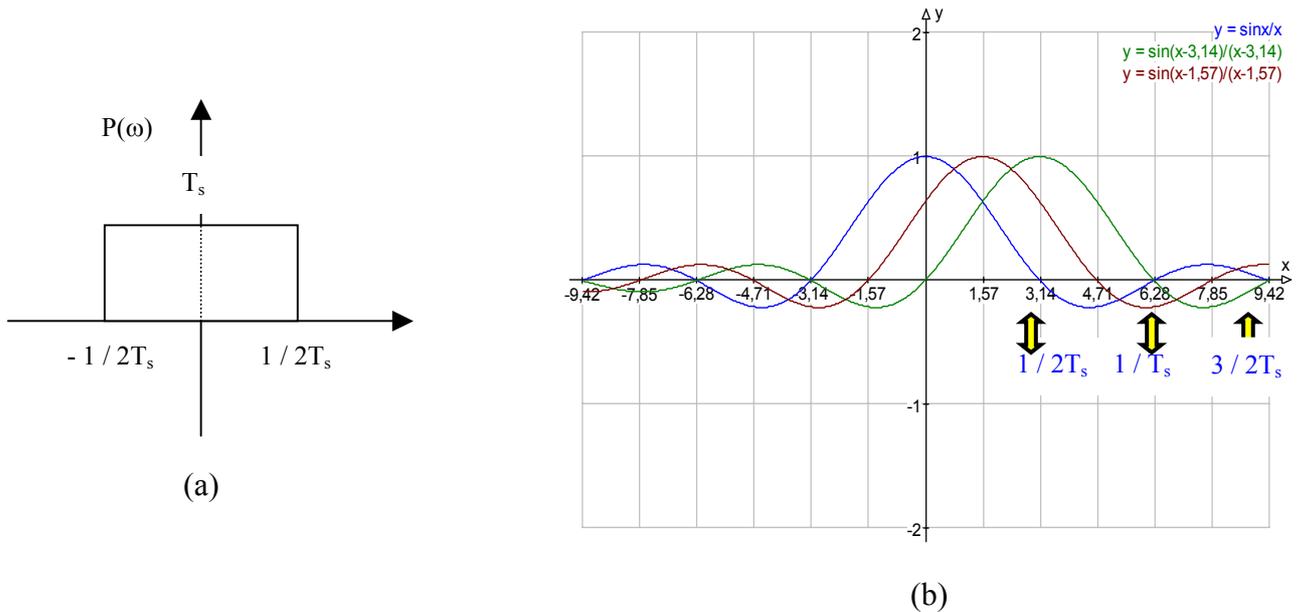


Figura 1.4 - Representação (a)freqüencial (b) temporal da função sinc.

Pode ser visto acima que a função sinc tem interferência nula nos pontos de interesse  $LT_s$ . Nyquist teria encontrado então uma solução fácil para a eliminação das IES. Porém, na prática, existem dificuldades na utilização desta função, devido ao fato dela ser a função transferência de um filtro passa-baixa **ideal**, que não é fisicamente realizável. Podemos ver que  $P(\omega)$  tem uma subida brusca no ponto  $-1/2T_s$  e uma queda repentina no ponto  $1/2T_s$ .

Outra dificuldade é que esta forma de onda exige uma sincronização muito precisa. Se o receptor não estiver sincronizado perfeitamente com o transmissor, surgirão IES. Para certas seqüências de sinais, os prolongamentos de todos os pulsos adjacentes se somarão em uma série divergente!

Nyquist então teve a idéia de procurar outras ondas que também tivessem como característica espectral:

$$P(\omega) = \begin{cases} T_s, & |f| \leq 1/2T \\ 0, & |f| \geq 1/2T \end{cases}$$

Fez-se então  $1/T < 2B$  e não mais  $1/T = 2B$ . Resultado:

$$p(Kt) = \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B P(\omega) \cdot e^{j\omega Kt} d\omega,$$

Como  $1/T < 2B$ ,  $p(Kt)$  pode ser representado como:

$$p(Kt) = \sum_{n=-N}^N \int_{-B}^B P(\omega) \cdot e^{j\omega Kt} d\omega,$$

Se a taxa de amostragem for de  $1/T$ , teremos:

$$p(Kt) = \sum_{n=-N}^N \int_{-B}^B P(\omega + \frac{n}{T}) \cdot e^{j\omega Kt} d\omega,$$

Definindo:

$$P_{eq}(\omega) = \sum_{n=-N}^N P(\omega + \frac{n}{T})$$

Ficamos com:

$$P_{eq}(\omega) = \begin{cases} T_s, & |f| \leq 1/2T \\ 0, & |f| \geq 1/2T \end{cases}$$

Este resultado foi surpreendente. Nyquist conseguiu provar que qualquer função que tivesse, em qualquer ponto, a soma da função inicial com a função deslocada igual a uma constante  $T$  seria de grande utilidade para as comunicações e teria IES nula. A onda inicial teria também que interceptar a deslocada no ponto  $1/2T$ . A *figura 1.5* ilustra um exemplo de funções que seguem esse padrão.

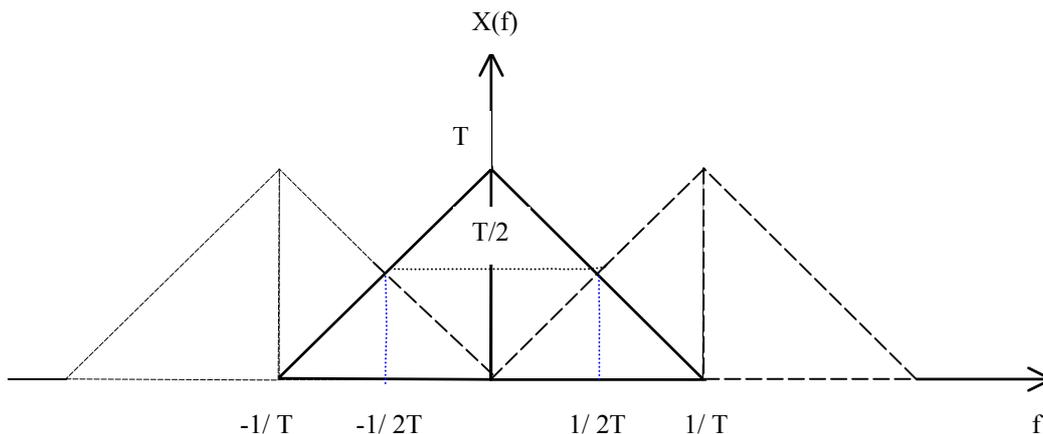


Figura 1.5 - Exemplo de função com IES nula

Pode-se ver que no ponto  $1/2T$  a soma da onda inicial com a deslocada é  $T/2 + T/2 = T$ . No ponto  $1/T$  a soma das ondas é  $0 + T = T$  e assim a diante.

É possível então projetar pulsos que nos darão IES nulas em um canal de largura  $B$  a uma taxa de transmissão que não exceda  $2B$ , ou melhor,  $1/T$ . Este ficou conhecido como o critério de Nyquist para projetos que requerem IES nulas. Como pode se ver a variedade de pulsos que podem ser usados é enorme. Mas o que teve maior aceitação na pratica foi a do cosseno elevado. Esta tem uma subida e uma queda um pouco mais “preguiçosa” como pode ser visto na *figura 1.6*.

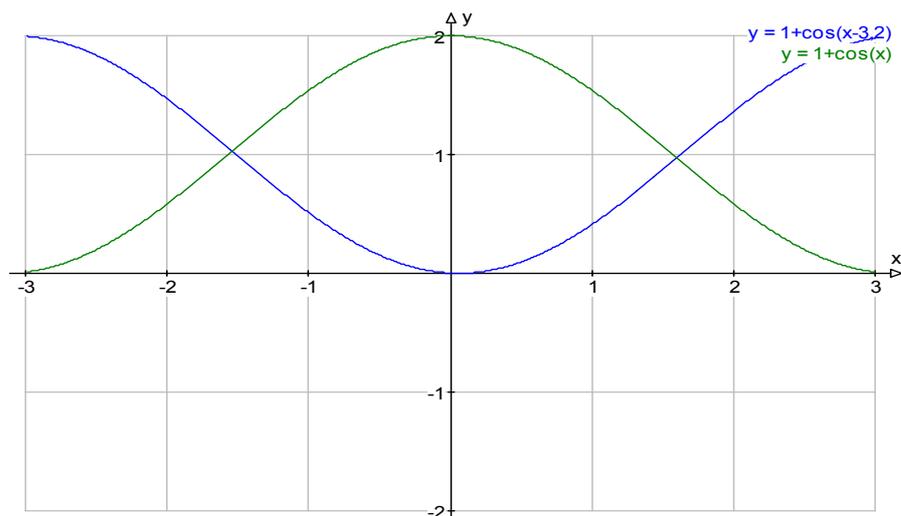


Figura 1.6 - Representação da função cosseno elevado.

O espectro do filtro em cosseno deslocado é dado por:

$$P(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi\omega}{2\omega_c} \right), & |\omega| \leq 2\omega_c \\ 0, & \text{fora desse intervalo} \end{cases}$$

Fazendo  $\omega = \omega_c + \Delta\omega$ , teremos:

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_c} \right) \right] = \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_c} \right)$$

A resposta impulsional deste filtro é dada por:

$$p(t) = \frac{\sin \pi t / T}{\pi / T} \cdot \frac{\cos \beta \pi t / T}{1 - 4\beta^2 t^2 / T^2}$$

Onde  $\beta$  é chamado de parâmetro de *rolloff*. A resposta  $p(t)$  é formada pela função sinc do filtro ideal multiplicado por um outro fator que decresce com o tempo, reduzindo consideravelmente os prolongamentos do pulso, de modo que, quando usados em transmissão digital esses pulsos são relativamente insensíveis a deslocamentos da seqüência de pulsos.

Na prática usa-se filtros com parâmetro de *rolloff* bastante pequenos. Temos como exemplo:

- ✓ MODEM 4.800 bps  $\Rightarrow$  *rolloff* = 0,125
- ✓ MODEM 19.200 bps  $\Rightarrow$  *rolloff* = 0,09375
- ✓ MODEM celular digital  $\Rightarrow$  *rolloff* = 0,35

O cosseno elevado tem então a seguinte característica freqüencial e pode ser visto na *figura 1.7*:

$$P(f) = \begin{cases} T, & 0 \leq |f| \leq (1-\beta)/2T \\ \frac{T}{2} \left[ 1 - \sin \pi T \left( f - \frac{1}{2T} \right) / \beta \right], & (1-\beta)/2T \leq |f| \leq (1+\beta)/2T \end{cases}$$

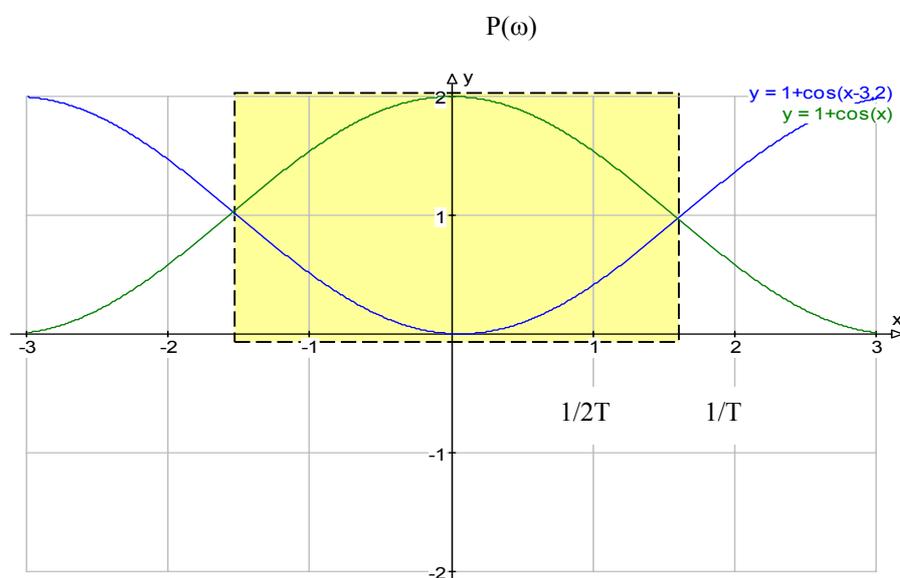


Figura 1.7 - Relação entre a representação freqüencial do cosseno elevado e de um filtro passa-baixas ideal.

No caso do estudo da eliminação da ISI, o estudo é conduzido no domínio temporal. A proposta da OFDM é adaptar o critério da eliminação de interferência ao domínio freqüencial. Para isto, o sinal é analisado via a DFT.[2]

### 1.3 DFT

Uma das maiores contribuições para o estudo de OFDM foi dada em 1971 por Weistein e Ebert. Eles usaram a DFT (Discrete Fourier Transform) no processo da modulação e demodulação. Ainda é cedo para se mostrar a idéia atrás do seu uso da DFT. Antes é preciso um prévio estudo da DFT e da Transformada Rápida de Fourier(FFT).

A DFT é muito usada no estudo do espectro de sinais e é determinada numericamente com o auxílio de computador digital.

Considerando-se  $N$  amostras do sinal no domínio do tempo (grau de truncamento), denotadas  $f[k]$ ,  $k=0,1,2,\dots,N-1$ , a DFT é dada por um conjunto de  $N$  amostras do sinal no domínio da frequência, denotadas por  $F(n)$ ,  $n=0,1,2,\dots,N-1$  e definidas por:

$$F(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{-j2\pi nk / N}$$

Diz-se então que  $f[k] \leftrightarrow F(n)$  formam um par transformada e a reobtenção do sinal no domínio do tempo pode ser feita usando a transformada inversa discreta de Fourier (IDFT).

$$f[k] = \sum_{n=0}^{N-1} F(n) e^{j2\pi kn / N}$$

### 1.3.1 Propriedades da DFT

As propriedades para o tempo discreto são similares àquelas da transformada de Fourier no tempo contínuo. [8]

$$\text{Se } x(kT_s) \leftrightarrow X\left(\frac{n}{NT_s}\right) \text{ e } y(kT_s) \leftrightarrow Y\left(\frac{n}{NT_s}\right)$$

Seguem então as principais propriedades da DFT:

#### Linearidade:

$$x(kT_s) + y(kT_s) \leftrightarrow X\left(\frac{n}{NT_s}\right) + Y\left(\frac{n}{NT_s}\right)$$

#### Simetria:

$$\frac{1}{N} X(kT_s) \leftrightarrow x\left(-\frac{n}{NT_s}\right)$$

#### Deslocamento no Tempo:

$$x(kT_s - lT_s) \leftrightarrow X\left(\frac{n}{NT_s}\right) e^{j\pi nl / N}$$

#### Teorema da Convolação em Frequência:

$$x(kT_s) \cdot y(kT_s) \leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X\left(\frac{i}{NT_s}\right) \cdot Y\left(\frac{n-i}{NT_s}\right) \equiv \frac{1}{N} X\left(\frac{n}{NT_s}\right) * Y\left(\frac{n}{NT_s}\right)$$

**Teorema de Parseval:**

$$\sum_{k=0}^{N-1} x^2(kT_s) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| X\left(\frac{n}{NT_s}\right) \right|^2$$

Pode-se também afirmar que as amostras da DFT são periódicas, verificando as seguintes relações:

$$F(n+mN) = F(n) \quad \text{e} \quad f[k+mN] = f[k] \quad m=1,2,3,\dots$$

Um aumento no grau de truncamento e uma certa escolha do tempo de amostragem  $T_s$  implica em uma melhor representação do espectro. Porém, que valores de  $N$  e  $T_s$  tomar?

Em 1948 Claude Elwood Shannon tentava provar o teorema da amostragem proposto por Shannon que dizia:

*“Um sinal  $f(t)$ , com máxima frequência que chamaremos  $f_m$ , é univocamente e perfeitamente determinado por suas amostras se elas forem equiespaçadas e tomadas a taxa maior que  $2f_m$  amostras/segundo”*

Shannon iniciou sua prova usando um trem de pulsos delta de Dirac( $\delta$ ) visto na figura 1.8:

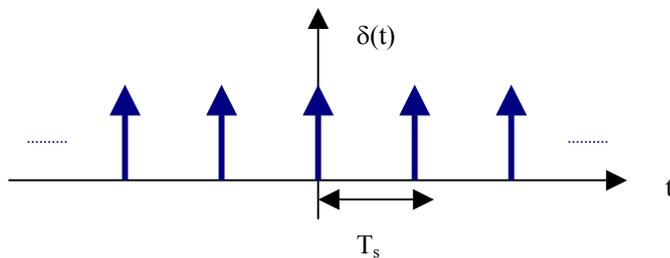


Figura 1.8 - Trem de pulsos delta de Dirac ( $\delta$ )

Onde:

$$\delta_{T_s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

O sinal  $f(t)$  que será transmitido, na amostragem fica:

$$f_s(t) = f(t) \cdot \delta_{T_s}(t)$$

Se for calculado o par transformada de  $f_s(t)$ , ficamos com:

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \omega_s F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

Isto equivale a:

$$F_s(\omega) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

$F_s(\omega)$  pode ser representado pela *figura 1.9*.

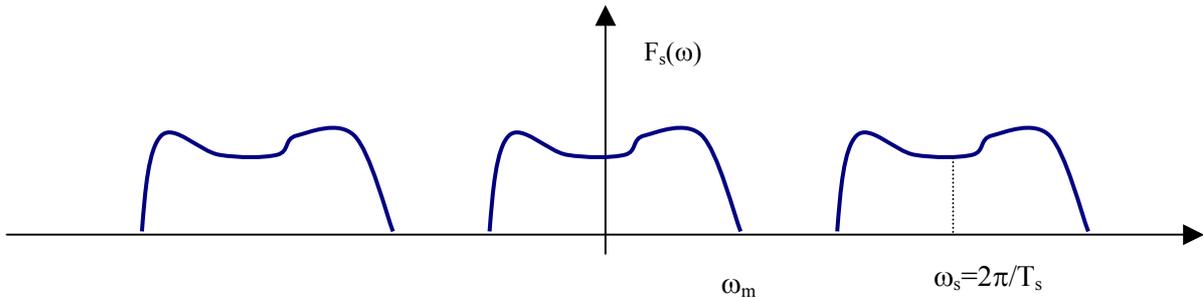


Figura 1.9 - Representação espectral da função  $f(t)$  amostrada a um intervalo de amostragem  $T_s$ .

Pode-se constatar que para  $\omega_s < 2\omega_m$  irá ocorrer “*aliasing*” ou superposição. Shannon conseguiu provar que devemos tomar  $T_s$  menor ou igual que duas vezes a frequência máxima do sinal enviado. Em comunicações o receptor geralmente não tem acesso a frequência do sinal enviado então como agir?

No caso da transmissão do sinal de voz, antes de mais nada, foi necessário que alguém estudasse o espectro de todos os possíveis tons de voz que existissem. Concluiu-se então que, em média, a frequência máxima do espectro caia em torno de 4000Hz. Usa-se então, na transmissão de voz, a taxa de amostragem de  $1/2 \times 4000 = 125 \mu\text{seg}$ .

### 1.3.2 FFT

Foi mostrado anteriormente que o calculo da DFT é dado por:

$$F(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{-j2\pi nk/N}$$

Sua representação matricial pode ser dada por:

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j2\pi(N-1)/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)^2/N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$$

$$[F(n)]_{N \times 1} = [M]_{N \times N} \cdot [f(n)]_{N \times 1}$$

Mostra-se então que para ser feita uma DFT são necessárias  $N^2$  multiplicações além das  $N-1$  adições dos resultados. Tomando como exemplo  $N=1024$ , teremos então que realizar 1048576 multiplicações mais 1023 adições. São no total 1049599 operações a serem realizadas. Se o processo tiver que ser realizado em tempo real, encontra-se uma grande obstáculo.[14]

Foi pensando nesse problema que J.W. Cooley da IBM, em colaboração com J.W. Tukey da Bell Labs conseguiram uma revolução maior no tratamento digital de sinais em 1965 com a publicação da transformada rápida de Fourier. Trata-se de um método engenhoso e altamente eficiente de reagrupar os cálculos dos coeficientes de uma DFT. Leva em conta o fato de que alguns dos termos precisarem ser computados apenas uma vez e armazenados em uma tabela para serem usados em futuras operações.

A FFT não é um tipo diferente de transformada e sim uma técnica que possibilita avaliar DFT de forma mais rápida e econômica. Muitos *softwares* já dispõem de rotinas para o cálculo da FFT. Entre as diversas aplicações da FFT destacam-se:

- ✓ Codificação de voz
- ✓ a determinação do espectro,
- ✓ realização de integrais de convolução,
- ✓ simulação de filtros e

A idéia de Cooley-Tukey foi quebrar o somatório que aparece na DFT em duas partes, relativas aos índices pares e ímpares. Com isso eles conseguiram reduzir o número de multiplicações de  $N^2$  para  $N \log_2 N$ . A *tabela 1* nos mostra a clara vantagem do uso da FFT.

Tabela 1. Complexidade multiplicativa para o cálculo de transformadas de Fourier.

N	$N^2$ (DFT)	$N \log_2 N$ (FFT)	Vantagem
2	4	2	2
4	16	8	2
8	64	24	2,67
16	256	64	4
32	1024	160	6,4
64	4096	384	10,67
128	16384	896	18,29
256	65536	2048	32
512	262144	4068	56,89
1024	1048576	10240	102,4
2048	4194304	22528	186,18
4096	16777216	49512	341,33
8192	671088964	106496	630,15

A existência de algoritmos rápidos é um fator decisivo nas inúmeras aplicações em tempo real da DFT. Devido ao algoritmo Cooley-Tukey base 2, freqüentemente usam-se comprimentos que são potência de 2.

Existem um grande número de diferentes algoritmos rápidos propostos na literatura, incluem Cooley-Tukey, Good-Thomas, PFA (Algoritmo de fatores primos) e Algoritmo de Winograd-Fourier (WFTA).

Recentemente **de Oliveira, Campello de Souza** e colaboradores (*Simp. Bras. de Telecom.*, 2000) propuseram um algoritmo baseado na decomposição multicamada de Hadamard para avaliar a DFT via Transformada Discreta de Hartley (DHT) que atinge complexidade mínima para diversos comprimentos de bloco.

**Neste trabalho investigamos um novo tópico de pesquisa, as Wavelets definidas sobre corpos finitos. Esta nova ferramenta tem potencial aplicação em modernos Sistemas de Comunicação tais como CDMA e OFDM, este último será abordado no capítulo a seguir. A idéia central é definir uma nova transformada digital que possibilite a substituição da DFT clássica, resultando em sistemas de melhor eficiência espectral.**

Para ter aplicações práticas, uma nova Transformada Rápida Wavelet sobre um Corpo Finito vem sendo estudada pelo mestrando Rodrigo Távora do Departamento de Eletrônica e Sistemas como tema de dissertação.[25]

A Transformada Wavelet será o assunto abordado em capítulos a seguir.

## Capítulo 2:

### OFDM:

A Multiplexação Ortogonal por Divisão de Frequência é uma técnica de transmissão multi-portadora que divide o espectro em várias sub-bandas. Essa técnica se assemelha ao FDMA (*Frequency Division Multiple Access*), no que diz respeito a divisão do espectro em várias portadoras. A principal diferença entre o OFDM e o FDMA é que o espaçamento entre as portadoras no OFDM é menor, devido ao fato das portadoras serem ortogonais entre si. Geralmente os sinais OFDM têm largura de banda de cada portadora na faixa de 1kHz, enquanto que no FDMA eles atingem 3kHz.

A geração do OFDM baseia-se principalmente nos seguintes passos:

1. Escolha do espectro necessário, de acordo com os dados a serem enviados e o tipo de modulação a ser utilizada;
2. Cada portadora é designada um trecho dos dados a serem transmitidos;
3. A amplitude e a fase necessária da portadora são calculadas de acordo com a modulação escolhida (e.g. BPSK, QAM ou QPSK);
4. Tendo tudo isto em mãos, converte-se o sinal de volta ao seu domínio temporal, pela Transformada Inversa Rápida de Fourier [26], mantendo a ortogonalidade das subportadoras no domínio freqüencial.

Este processo pode ser visto na figura 2.[3]

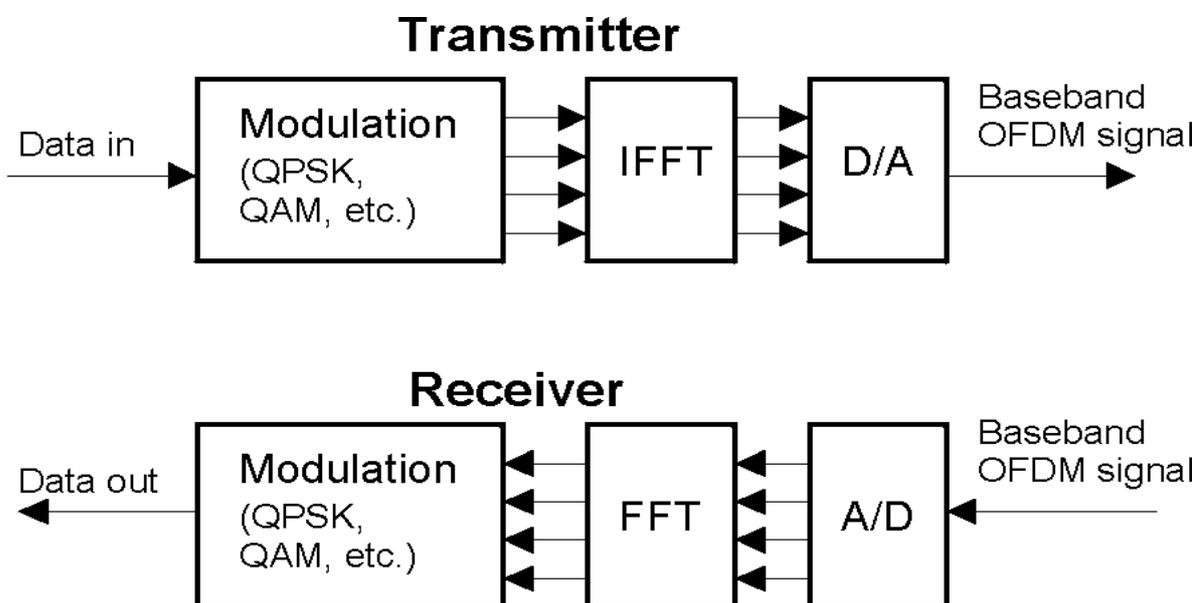


Figura 2. - Diagrama em blocos do Transmissor e Receptor de sinais OFDM

Vimos então que a grande vantagem do sistema OFDM é o fato das portadoras serem ortogonais entre si, podendo então ser transmitido uma quantidade maior de informação em uma mesma largura de banda.

Para que esta propriedade se permaneça, alguns cuidados devem ser levados em conta. São eles:

1. O receptor e o transmissor têm de estar em perfeita sincronia;
2. Os componentes analógicos dos receptores e transmissores têm de ser de ótima qualidade;
3. Não deve haver canal com multipercursos.

Como grande partes das transmissões são através de canais com multipercurso, achou-se uma solução bastante prática, chamada de inserção de prefixo cíclico, onde a última parte do símbolo OFDM é inserido no início do mesmo, como pode ser visto na *figura 2.1*. [9]

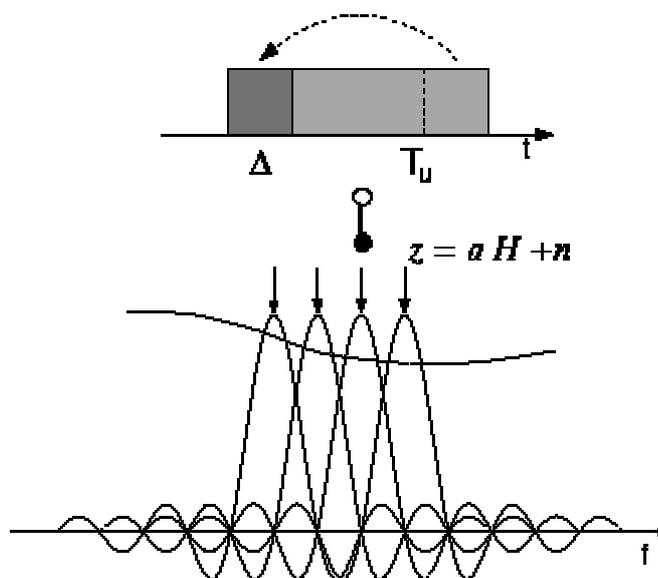


Figura 2.1- Processo de inserção do prefixo cíclico e seu espectro correspondente

Este procedimento deixa o sinal periódico ajudando no combate a Interferência Entre Símbolos e a interferência entre portadoras. Se o intervalo do prefixo for maior que o atraso máximo do canal, as reflexões dos sinais anteriores desaparecerão antes mesmo do sinal verdadeiro ser analisado. No receptor o prefixo cíclico é retirado eliminando qualquer forma de interferência. O preço que se paga é o fato de parte do sinal não estar carregando informação, diminuindo assim a relação sinal-ruído.

Estas propriedades podem ser utilizadas nas tecnologias ADSL e HDTV, temas estes, dos próximos dois capítulos.

## Capítulo 3

### ADSL:

No final da década de 80, a rede mundial Internet já servia milhares de usuários, especialmente aqueles em ambiente de pesquisa. Nesta época os PC's tornaram-se atrativos a usuários não técnicos e de acesso esporádico, atraídos pelas facilidades das interfaces gráficas. O acesso à rede, porém, era totalmente desencorajado devido a suas interfaces exclusivamente para textos e comandos complicados.

Nos anos 90 a situação modificou-se radicalmente com o aparecimento da WWW, proporcionando um acesso fácil e muito mais agradável. Hoje em dia temos transmissão de vídeo, multimídia, todos requerendo uma alta taxa de transmissão.

Atualmente, a maior restrição ao uso da web é a velocidade: um grande desafio é prover um acesso a web em taxas mais elevadas que aquelas proporcionadas por acesso discado via MODEM.

A Linha de Assinante Digital Assimétrica (*ADSL*) é uma nova tecnologia que converte as linhas telefônicas convencionais baseadas em par trançado, em vias para acesso multimídia, especialmente para a internet.

O canal é dividido em subcanais, cada um modulado e codificado com informação correspondente, como no caso de sistemas de portadora única. A modulação multi-portadora tende a ajustar a taxa de transmissão à condição da linha e seu ruído ambiente. Quando a relação sinal-ruído fica inferior a um dado nível previamente especificado, o subcanal ruidoso é desativado, e se possível a informação é movida para outro canal. O objetivo central é propiciar um acesso dinâmico à largura de faixa disponível no canal, além de fornecer maior eficiência espectral (bits/Hz/s) que outras técnicas.

A tecnologia é chamada de assimétrica pois apresenta um canal de *upstream* a uma taxa de até 512 kbps e um canal de *downstream* a uma taxa de até 1,5 Mbps, além da linha telefônica usual (*POTS – Plain Old Telephone System*) como pode ser visto na *figura 3*.

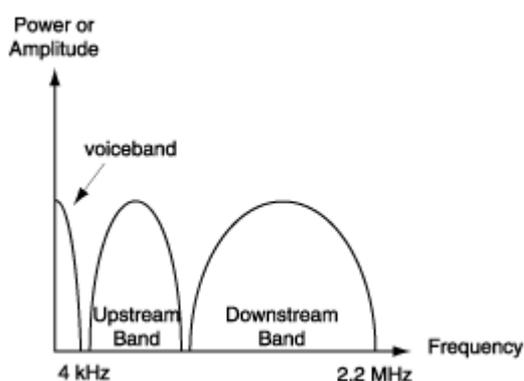


Figura 3 - Espectro representando o comportamento da tecnologia ADSL

Levando em consideração o fato que MODEM's transmitem, no máximo, a 56kbps, esta é uma ótima estratégia para as companhias telefônicas de oferecer um sistema a altas taxas de transmissão (banda larga) enquanto as fibras óticas não se popularizam.

Os subcanais existentes podem ser gerados utilizando o sistema OFDM e também por uma tecnologia, ainda não mencionada neste trabalho, a DMT (*Discrete MultiTone*). A idéia principal por trás da DMT é dividir a largura de banda do canal em diversos subcanais. A tecnologia possibilita a alocação de dados de um subcanal para outro, caso a relação sinal-ruído do mesmo atinja valores abaixo de um valor predeterminado, como crítico. Caso isto ocorra o subcanal ruidoso será "desligado", resultando num uso de largura de banda otimizado. Exemplos do uso da DMT podem ser vistos na *figura 3.1*.

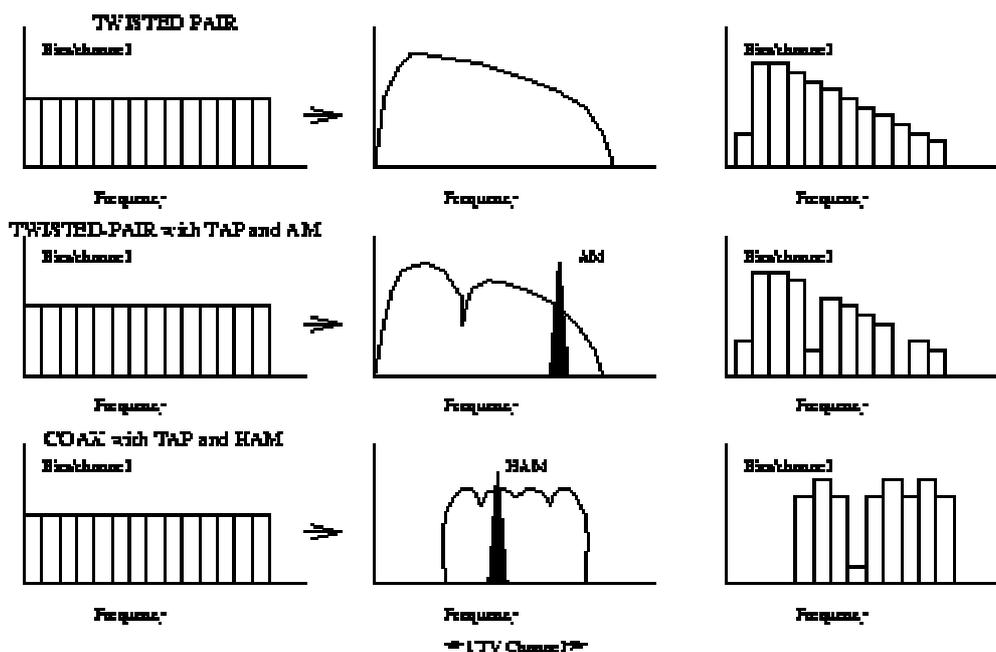


Figura 3.1 - Exemplos de uso da DMT em uma linha telefônica de par trançado (twisted pair), em uma linha telefônica de par trançado com interferência de uma estação AM e em um cabo coaxial (COAX).

Para criar canais múltiplos, um MODEM ADSL divide a banda da linha telefônica em duas. Esta divisão pode ser realizada por dois métodos: FDM ou *Echo Cancellation*<sup>3</sup> e pode ser vista na *figura 4.2*.

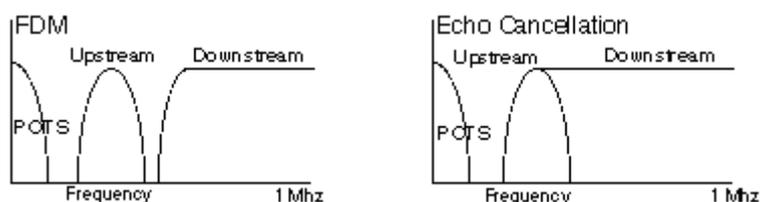


Figura 3.2 - Divisão de banda de uma linha telefônica por FDM e Cancelamento de Eco.

<sup>3</sup> Filtros Digitais

Se a divisão for por FDM, uma banda é designada aos dados *upstream* e a outra banda aos dados *downstream*. O caminho *downstream* é então dividido, usando a multiplexação por divisão no tempo (*TDM*), em um ou mais canais de alta velocidade de transmissão. O caminho *upstream* é multiplexado em canais de baixa velocidade de transmissão.

Usando o método de Cancelamento de Eco(*Echo Cancellation*) os caminhos *downstream* e *upstream* se cruzam. A separação dos dados é feita por um cancelamento local de eco, com o uso de filtros digitais, técnica usada em MODEMs V.32 e V.34. Em ambos os casos citados, os primeiros 4kHz da banda é destinada ao *POTS*.

## Capítulo 4

---

### **HDTV Digital: Histórico:**

O termo HDTV – *High Definition Television* não é novo. Tem sido usado ao longo do tempo para definir o começo de novas gerações de sistemas de TV. Na década de 30 o termo foi usado para descrever a televisão monocromática que utilizava 405 linhas e representou um grande avanço sobre sua antecessora, a televisão com varredura mecânica. Em 1948, o termo HDTV foi usado em referência ao sistema de TV de 819 linhas monocromática introduzida na França. Na década de 70 iniciou-se no Japão um programa de pesquisa e desenvolvimento que conduziu a criação de um sistema HDTV com aproximadamente 1000 linhas. Esse sistema japonês pode ser considerado o precursor moderno dos sistemas HDTV atuais, a HDTV Digital.

A partir de 1990 os Estados Unidos começou a investir pesado no estabelecimento de um sistema HDTV que utilizasse 6MHz de largura de banda por canal, como nas TVs convencionais. Concentraram então nas técnicas de compressão de vídeo digital e técnicas de modulação adequadas. Surgiram então os padrões M-Peg 1 e 2 de compressão de imagens.

Na Europa os padrões para HDTV surgiram a partir de um consórcio entre indústrias e o governo chamado de “*Digital Video Broadcasting*”. Esse grupo estabeleceu a transmissão digital via satélite e via cabo e depois completou com o padrão de transmissão digital terrestre, conhecida como DVB-T.

No Japão foi desenvolvido o padrão de radiodifusão de serviços multimídia conhecido como “*Integrated Services Digital Broadcasting – ISDB*”.

O DVB-T e o ISDB utilizam a modulação COFDM (*Coded Orthogonal Frequency Division Multiplexing*). Tem este nome, pois codifica o canal antes do processo de modulação. O COFDM possibilita uma melhor ocupação do espectro e conseqüentemente um maior número de canais disponíveis.

O sistema americano ATSC (*Advanced Television System Committee*) optou por utilizar a modulação 8-VSB (*Vestigial Side Band*) com portadora única por ser uma tecnologia já consolidada na época.

No Brasil vários testes foram realizados com os três sistemas: americano, europeu e japonês. O fato é que não há, pelo menos até agora, um consenso sobre qual seria o melhor sistema HDTV. Dessa forma, muitas vezes fatores políticos e econômicos têm maior peso do que aspectos técnicos na escolha do sistema a ser adotado.

Quem coordena a padronização no Brasil é a ANATEL (Agência Nacional de Telecomunicações). Os testes dos sistemas estão sendo gerenciados pela universidade de Mackenzie e a validação dos testes pelo CPqD e o grupo SET/Abert (Sociedade Brasileira de Engenharia de Televisão e Associação Brasileira de Emissoras de Rádio e Televisão). A irradiação da transmissão foi gerada pela TV Cultura.

O Brasil tem investido seriamente em pesquisas relacionadas com essa tecnologia envolvendo parte de órgãos governamentais, grupos de trabalhos e estudos de Universidades, bem como associações de grupos empresariais. Esses esforços são conduzidos de modo que seja possível se obter as bases científicas para se adotar um padrão, entre os já citados acima, que venha a se adequar à realidade do mercado brasileiro.

O Brasil ainda não está totalmente decidido sobre que padrão adotar, embora tudo indique que seja o padrão Europeu e a modulação COFDM, que mostra, nos testes, ser a mais adequada às condições brasileiras.[12][13]

Acho que o Brasil está esperando para ver se os EUA, Europa e Japão irão partir para uma única seleção, para que não corra o risco de começar isolado, como foi o caso do sistema PAL-M. Essa motivação também tem respaldo econômico já que investimentos na área de *broadcasting* são volumosos e erros podem resultar em enormes prejuízos e acertos levará a reflexos socioeconômicos positivos a médio e longo prazo.[6]

### **Modulação COFDM:**

Sua modulação é a mesma vista no capítulo 2, porém, os dados, ao serem enviados, têm um acréscimo de bits de informação. São os códigos corretores de erro, embaralhamento, entrelaçamento, código de treliça, entre outros usados para diminuir os erros introduzidos pelas imperfeições do canal de transmissão.

No DVB-T a codificação do canal envolve a codificação de Reed-Solomon e de Treliça.

Os dados de entrada do modulador são números complexos, representando pontos de uma constelação, podendo ela ser a QPSK, 16-QAM ou a 64-QAM. O mapeamento dos bits a serem transmitidos em pontos de uma constelação de forma a se permitir, se assim desejado, transmissão hierárquica de informação em dois níveis de prioridade. Além dos dados complexos são também transmitidos portadoras piloto e portadoras de parâmetros de sinalização (PPS). As portadoras piloto são usadas para sincronismo de quadro, de frequência e de tempo, estimação de canal e ainda acompanhar o ruído de fase introduzido pelo canal. As PPS são utilizadas para transmitir parâmetros de sistema, e.g. tamanho de intervalo de guarda, constelação utilizada, etc.

O sinal transmitido pode ser implementado por dois modos: 2k e 8k. (Vide tabela 2)

Tabela 2 – Características da modulação COFDM

<b>Parâmetros</b>	<b>Modo 8k</b>	<b>Modo 2k</b>
Número de portadoras	6817	1705
Espaçamento entre portadoras	1116 Hz	4464Hz

A modulação em si foi mostrada no capítulo 2 e envolve a Transformada Inversa Rápida de Fourier.

## Capítulo 5

### Wavelets Contínuas

O objetivo deste trabalho é de investigar novas aplicações semelhantes a da OFDM usando a transformada wavelet no corpo finito. Neste tópico será abordado o estudo das wavelets no contínuo para servir como base ao nosso tópico.

A teoria por trás da análise de Fourier nos diz que um sinal pode ser representado por uma soma infinita de termos em seno e cossenos, mais conhecida como a expansão de Fourier. A Transformada de Fourier (T.F.) tem suas grandes vantagens e também as suas desvantagens. A maior destas é o fato da T.F. poder determinar todas as frequências presentes no sinal, porém sua relação com o domínio temporal não existe. A transformada de Fourier não nos fornece uma análise temporal, apenas frequencial.[10]

Para superar este problema, várias soluções foram encontradas objetivando ter uma análise, ao mesmo tempo, temporal e frequencial, de sinais não estacionários. A primeira delas foi a Transformada de Fourier de Tempo Curto (*STFT – Short Time Fourier Transform*) ou também conhecida como a Transformada de Gabor. A idéia da STFT é introduzir um novo parâmetro de frequência local (local no tempo) como se a “Transformada Local” observasse o sinal através de uma curta janela dentro da qual o sinal permanece aproximadamente estacionário. Precisa-se então de uma representação bidimensional  $F(t, \omega)$  do sinal  $f(t)$ , composta por características espectrais dependentes do tempo.

A transformada local observa o sinal  $f(t)$  através de uma janela  $J(t)$  centrada no instante de tempo  $\tau$  e de extensão limitada. Ficamos então com:

$$STFT(\tau, \omega) = \int f(t) \cdot J^*(t - \tau) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Existem várias escolhas para a janela, sendo a mais comum a janela Gaussiana. O detalhe mais importante é que uma vez fixada a janela para a STFT, a resolução no tempo ( $t$ ) e na frequência ( $f$ ) permanece constante em todo o plano  $t$ - $f$ , como mostrado na *figura 5.1 (a)*.

Os problemas na resolução do tempo e da frequência são resultados de um fenômeno físico conhecido como o Princípio de Heisenberg (é impossível saber a frequência exata e o tempo exato de ocorrência desta frequência, num sinal). Este fenômeno é indiferente em relação à transformada usada. A maneira de se analisar então o sinal é usando uma forma alternativa de análise chamada de Análise Multi-Resolucional (AMR). Como o próprio nome diz, ela analisa o sinal em frequências diferentes com resoluções diferentes, como mostrado na *figura 5.1 (b)*.

Tem-se uma alta resolução no tempo e baixa na frequência para frequências mais altas e uma resolução frequencial alta e resolução temporal baixa para frequências mais baixas. Isto devido ao fato de sinais com componentes em alta frequência terem rápidas alterações no domínio temporal e sinais com componentes de baixa frequência terem alterações mais lentas no domínio temporal.

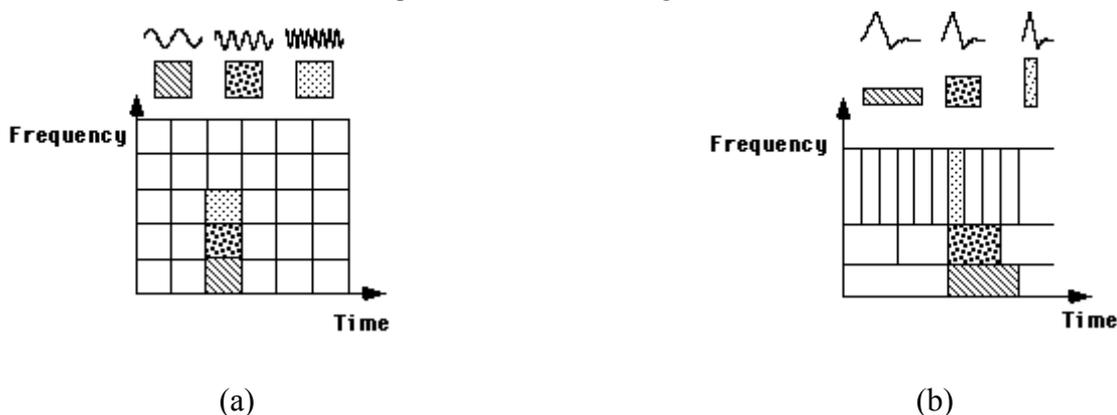


Figura 5.1 – Resolução no plano t-f pela análise (a) STFT (b) Transformada Wavelet [4]

A transformada Wavelet foi desenvolvida como uma alternativa à STFT para solucionar o problema da resolução. A análise com wavelets é feita similarmente à análise com STFT, no que diz respeito à multiplicação do sinal por uma função (que neste caso será a wavelet e não mais a janela  $J(t)$ , como na STFT). A transformada é calculada separadamente por segmentos diferentes do sinal no domínio do tempo.

As wavelets foram introduzidas por franceses que estudavam as variações sísmológicas e viram que durante as repentinas variações do sinal a análise de Fourier não estava sendo eficiente. As wavelets se desenvolveram nos campos da matemática, engenharia, na física quântica e hoje são também usadas em: compressão de imagem, eliminação de ruídos, radar e previsão de terremotos.

As wavelets são funções matemáticas que separam dados em suas diferentes componentes de frequência, e extraem cada componente com uma resolução adequada à sua escala. Elas têm vantagens em relação a análise de Fourier pois este último analisa o sinal como um todo, acarretando erros em sinais que contêm descontinuidades e variações bruscas.

A idéia fundamental da transformada wavelet é que ela é uma transformada pontual e proporcional à escala. Ela analisa o sinal em escalas diferentes e se desloca analisando cada ponto do sinal.

A transformada wavelet contínua (CWT) é definida por:

$$CWT(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \cdot \int f(t) \cdot \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt$$

Onde  $\tau$  (Tau) e  $s$  são os parâmetros translação e escala, respectivamente. A função  $\psi(t)$  se modifica no decorrer da transformada e é conhecida como *wavelet mãe*. O termo mãe vem do fato que funções com diferentes tamanhos são usadas no processo da transformada e todas são originadas de uma wavelet principal, a wavelet mãe. Ela é um protótipo para a geração de outras funções janela.

O parâmetro translação se relaciona com a localização da “janela”. Analisa-se o sinal aos poucos. Este termo corresponde, obviamente à informação de tempo no domínio da transformada. Processa-se o conteúdo que estiver dentro da janela.[16]

O parâmetro escalonamento é o processo de compressão e dilatação do sinal. É similar ao conceito de escala quando se fala em mapas. As altas escalas correspondem a uma visão global do sistema, enquanto que as baixas escalas correspondem a uma visão mais detalhada.

Em termos de funções matemáticas, dada uma função  $f(t)$ ,  $f(s.t)$  corresponde a uma versão:

- ✘ Comprimida, se  $s > 1$ ;
- ✘ Expandida, se  $s < 1$ .

No caso da transformada wavelet, o parâmetro escala aparece no denominador. Neste caso teremos uma versão:

- ✘ Comprimida, se  $s < 1$ ;
- ✘ Dilatada, se  $s > 1$ .

Todas as janelas a serem utilizadas são versões dilatadas e comprimidas da wavelet mãe. A transformada de Fourier tem como função base os senos e cossenos que são funções ortogonais entre si. Esta ortogonalidade resulta em propriedades desejáveis na reconstrução do sinal.

Vamos agora analisar a transformada wavelet por outro caminho. Sabe-se que o produto interno de duas funções é dado por:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g^*(t) dt$$

Comprova-se que a transformada wavelet nada mais é que o produto interno da função  $f(t)$  com a função base  $\psi^*(\tau, s)$  multiplicada por uma constante:

$$CWT(\tau, s) = \langle f(t), \psi^*(\tau, s) \rangle = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int f(t) \cdot \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt$$

A transformada wavelet não tem apenas uma função base, como na T.F. Muito pelo contrário, pode ter infinitas funções base, desde que seja obedecida o critério de ortogonalidade. [15]

Para garantirmos a ortogonalidade, o produto interno das duas funções tem que dar nulo:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = 0 \Rightarrow f(t) \text{ e } g(t) \text{ são ortogonais entre si}$$

Existem um grande número de funções wavelet-mãe que podem ser usadas. Na *figura 5.2* algumas delas são mostradas.

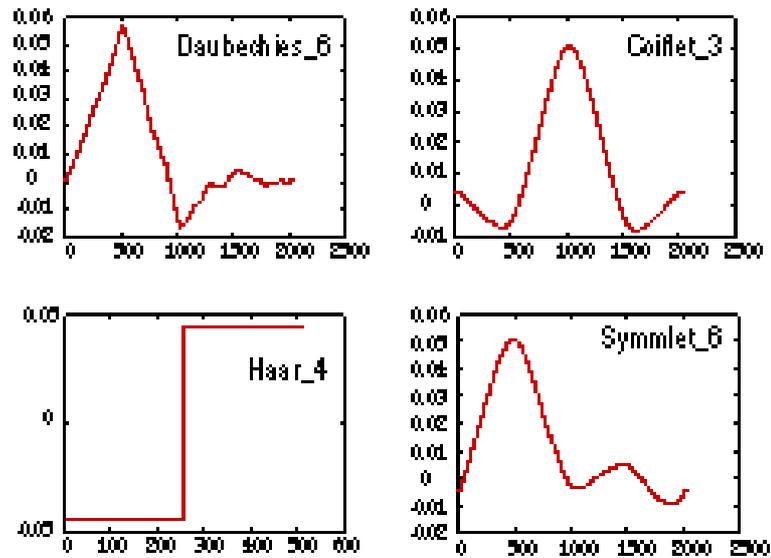


Figura 5.2 – Imagens das quatro wavelets mãe mais usuais.

As imagens da *figura 5.2* foram geradas pelo programa WaveLab, programa criado para rodar junto ao Matlab<sup>®</sup> usando-se os seguintes comandos:

```

✘ wave=MakeWavelet(2,-4,'Daubechies',6,'Mother',2048);
✘ wave = MakeWavelet(2,-4,'Coiflet',3,'Mother',2048);
✘ wave = MakeWavelet(0,0,'Haar',4,'Mother',512);
✘ wave = MakeWavelet(2,-4,'Symmlet',6,'Mother',2048);

```

Um critério usado para definir se uma função pode ser uma wavelet é provar que ela é oscilatória (onda=*wave*), ou melhor, seu valor médio no domínio temporal tem que ser nulo. Matematicamente falamos, devemos satisfazer o seguinte critério:

$$\int \psi(t)dt = 0$$

A transformada wavelet é uma transformada reversível e aplicável ao Teorema de Parseval, desde que satisfaça a condição de admissibilidade, mostrada a seguir.

Dado o par transformada de Fourier:  $\psi(t) \leftrightarrow \psi(\omega)$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty \quad e$$

$$|\psi(\omega)|^2_{\omega=0} = 0$$

## Capítulo 6

### Wavelet Discreta

A transformada wavelet contínua é calculada fazendo translações e escalonamentos contínuos de uma função sobre um sinal, calculando a correlação entre eles. Na prática esta transformada não seria muito útil, pois teria que realizar infinitas translações e escalonamentos, requerendo muito tempo e recursos computacionais, ainda assim, gerando muita redundância.

Para superar este obstáculo foram introduzidas as wavelets discretas. Elas não são transladas nem escalonadas continuamente, e sim em intervalos discretos. Isto pode ser feito com uma pequena modificação na wavelet contínua.

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \Rightarrow \psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s_0^j|}} \psi\left(\frac{t-k\tau_0 s_0^j}{s_0^j}\right)$$

Onde  $j$  e  $k$  são inteiros,  $s_0 > 1$  é um parâmetro de dilatação fixo,  $\tau_0$  é o fator de translação e depende do fator de dilatação.

A wavelet discreta continua sendo uma wavelet contínua, porém amostrada em intervalos discretos. Geralmente escolhe-se  $s_0 = 2$  para que se tenha uma amostragem da frequência chamada de amostragem dyadica e  $\tau_0 = 1$  é escolhido para que a amostragem temporal também seja dyadica. Resulta-se em:

$$\psi_{j,k}(x) = \sqrt{2^j} \psi(2^j x - k)$$

Quando se usa as wavelets discretas para analisar um sinal, o resultado é uma série de coeficientes wavelet, também chamada de Série de Decomposição de Wavelet.

Ao amostrarmos nosso sinal em intervalos discretos no eixo temporal e frequencial, diminuimos boa parte da redundância, porém podemos ter ainda **infinitos** números de translações e escalonamentos discretos. A partir deste momento surge a pergunta: É possível truncar a análise via wavelet em um certo ponto e ainda termos um resultado confiável?

As translações são limitadas à duração do sinal, logo existe um limite superior. Resta então analisar o escalonamento. Quantas escalas serão necessárias para se analisar o sinal? Este problema pode ser analisado da seguinte maneira:

Relembrando uma propriedade da análise de Fourier, a de escalonamento. Temos que:

$$\mathfrak{T}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Uma compressão, no tempo, da wavelet, irá proporcionar uma expansão do espectro da wavelet e uma translação dos componentes de frequência da mesma, como pode ser visto na *figura 6.1*.

Para se analisar o espectro como um todo (até a origem), seria necessário ter infinitas wavelets escalonadas, já que cada expansão no tempo comprime proporcionalmente a sua largura de banda. Ou seja, por mais escalonamentos que se faça no domínio temporal, você estará cobrindo apenas parte do espectro restante e nunca conseguirá chegar à origem.

A solução para este obstáculo é simplesmente não cobrir o espectro até a origem. Cobre-se o espectro até que a banda seja suficiente para “tapar o buraco” [ARFGTW], como mostrado na *figura 6.2*.

Com este valor<sup>4</sup> podemos achar um limite inferior para o escalonamento, que era o que restava.

Figura 6.1 – Compressão no tempo gera uma expansão do espectro da wavelet e uma translação de seus componentes de frequência.

Figura 6.2 – Translações necessárias (*cork*)

Como uma wavelet pode ser vista como um filtro passa-faixa, a série de wavelets dilatadas pode ser visto como um banco de filtros passa-faixa. Uma curiosidade aparece quando se toma a razão entre a frequência central do espectro de cada wavelet deslocada e o comprimento total de seus respectivos espectros. A razão é constante para todos os deslocamentos! Esta razão ficou conhecida então como o fator de fidelidade-Q do banco de filtros.

Na prática tem-se à disposição uma wavelet discretizada, com limites superiores e inferiores para as translações e os escalonamentos, faltando apenas o cálculo de sua Transformada Wavelet Discreta (DWT).

A idéia de se passar um sinal por um banco de filtros já vem sendo usado há vários anos e é conhecida como *Subband Coding*. Este princípio será usado no cálculo da Transformada Wavelet Discreta.

O banco de filtros usado no *subband coding* pode ser projetado de diversas maneiras. O modo usado na análise para wavelets discreta será projetar filtros passa-alta (HPF) e passa-baixa (LPF) de tal modo que “quebre” o sinal exatamente ao meio. A parte do filtro passa-alta contém as altas frequências que já nos fornece a informação com os mínimos detalhes. Precisa-se então analisar com mais cuidado a parte do filtro LPF, pois ele fornece apenas uma visão global destas frequências. Passa-se este trecho

---

<sup>4</sup> Também chamado de *cork* significando rolha em inglês

do espectro por outro par de filtros: um LPF e um HPF. Da mesma maneira que foi citado acima, a parte do HPF já fornece detalhes o suficiente, então quebra-se novamente a parte do LPF, até estarmos satisfeitos com o número de bandas criadas. Este processo pode ser visualizado melhor na *figura 6.3*.

Ao comparar a *figura 6.2* com a *figura 6.3* fica claro que o processo de passar o sinal por um banco de filtros nos fornece o mesmo resultado que a transformada wavelet do sinal.

### Figura 6.3 – Banco de filtros / Codificação Subband

Uma wavelet discreta não é discreta no tempo e sim nas translações e escalonamentos. Ao passarmos o sinal então por um banco de filtros digitais podemos ter nossa DWT.

O procedimento começa com a passagem do sinal através de um filtro passa-baixa digital de meia banda<sup>5</sup> com resposta ao impulso  $h[n]$ , onde  $n$  é um número inteiro. A operação de convolução em tempo discreto é realizada da seguinte forma:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_k x[k] \cdot h[n - k]$$

Após o sinal passar pelo filtro passa-baixa de meia banda, metade das amostras é eliminada, já que a frequência máxima vale agora metade de seu antigo valor. O sinal fica subsampleado<sup>6</sup> por dois. A escala do sinal fica então multiplicada por dois. Nota-se

---

<sup>5</sup> Anula as frequências que estão acima da metade da maior frequência do sinal.

<sup>6</sup> Reduzir a taxa de amostragem ou remover algumas amostras do sinal.

que o LPF remove a informação de alta frequência, porém mantém sua escala inalterada. A escala é alterada apenas pelo processo de *subsampling*. A resolução por outro lado é afetada pela filtragem, pois metade das frequências do sinal é eliminada.

A DWT emprega dois tipos de funções, chamadas de funções escala e funções wavelet, que estão, por sua vez, associadas com os LPFs e HPFs, respectivamente. A decomposição do sinal em bandas de frequências diferentes é simplesmente obtida pela filtragem sucessiva do sinal como pode ser visto na *figura 6.4*.

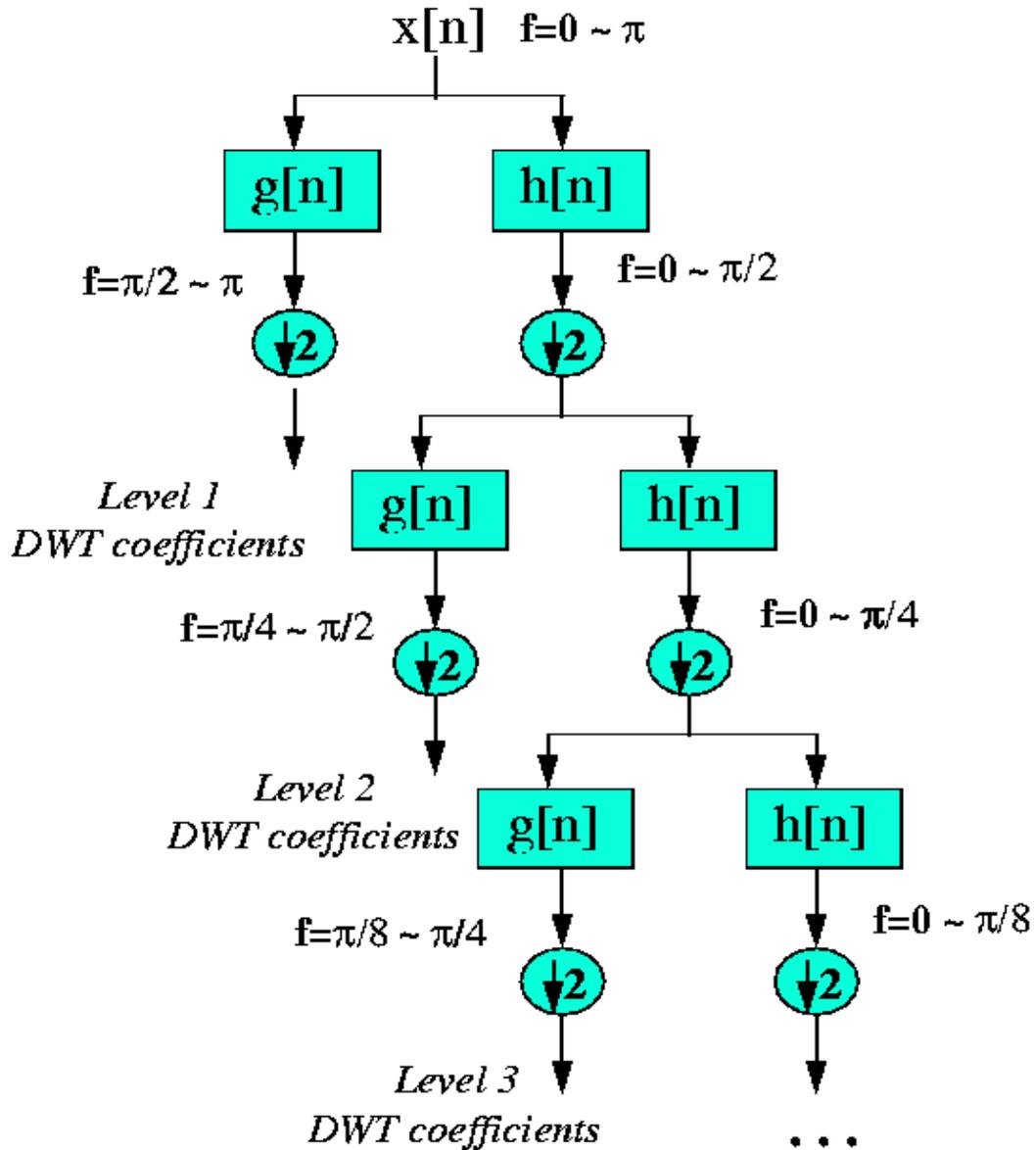


Figura 6.4 – Cálculo dos coeficientes da Transformada Discreta Wavelet usando filtragem e *subamostragem*. [23]

## Capítulo 7

### Corpo Finito

Chama-se corpo ou campo (field) um determinado alfabeto de símbolos finitos junto com as operações de adição e multiplicação definidas dentro deste campo e seguindo as seguintes propriedades:

- Fechamento em relação as operações de adição e multiplicação;
- Existência de elemento neutro aditivo e multiplicativo;
- Existência de elemento inverso aditivo e multiplicativo.

Dado  $C$  um grupo fechado com relação à multiplicação e adição; um elemento  $e \in C$  é dito neutro multiplicativo e aditivo, respectivamente, se:  $ea = ae = a$  e  $e + a = a + e = a$  para todo  $a \in C$ .

Um elemento  $e' \in C$  é dito inverso multiplicativo e aditivo, respectivamente, se:  $aa^{-1} = a^{-1}a = e'$  e  $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e'$  para todo  $a \in C$ .

Representa-se um corpo com  $n$  símbolos como  $GF(n)$ . O exemplo mostrado a seguir ilustra melhor as propriedades acima descritas:

$\oplus$	$0 \ a^1 \ a^2 \ a^3 \ a^4$
$0$	$0 \ a^1 \ a^2 \ a^3 \ a^4$
$a^1$	$a^1 \ a^2 \ a^3 \ a^4 \ 0$
$a^2$	$a^2 \ a^3 \ a^4 \ 0 \ a^1$
$a^3$	$a^3 \ a^4 \ 0 \ a^1 \ a^2$
$a^4$	$a^4 \ 0 \ a^1 \ a^2 \ a^3$

$\otimes$	$0 \ a^1 \ a^2 \ a^3 \ a^4$
$0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$
$a^1$	$0 \ a^1 \ a^2 \ a^3 \ a^4$
$a^2$	$0 \ a^2 \ a^4 \ a^1 \ a^3$
$a^3$	$0 \ a^3 \ a^1 \ a^4 \ a^2$
$a^4$	$0 \ a^4 \ a^3 \ a^2 \ a^1$

As operações apresentadas acima são chamadas, neste caso, de adição “módulo-5” ( $+_5$ ) e multiplicação “módulo-5” ( $\bullet_5$ ).

Chama-se **corpo de Galois** e representa-se por  $GF(2^m)$  um corpo com  $2^m$  elementos. Corpos desse tipo são muito importantes no estudo de códigos cíclicos como as chamadas seqüências pseudo-aleatórias<sup>7</sup>. Por enquanto é de interesse definir uma aritmética utilizando os  $2^m$  elementos do corpo. Para isso deve-se partir de um polinômio primitivo, um polinômio  $p(x)$  irredutível de grau  $m$  tal que  $p(\beta) = 0$ , onde

<sup>7</sup> É sabido que para a realização de testes em sistemas que empregam circuitos analógicos os sinais senoidais e o ruído branco gaussiano são quase sempre utilizados. Quando se trata de sistemas digitais, os sinais analógicos senoidais são substituídos por seqüências alternadas de 1's e 0's, para o caso binário. O problema é gerar um sinal digital com características randômicas que represente o mesmo que o ruído branco gaussiano representava para o exemplo analógico. A seqüência que interessa, então deve ser uma que possua uma determinada periodicidade, dentro da qual haja uma repetição de padrões de 0's e 1's (se for binário) e, simultaneamente, deve oferecer propriedades aleatórias. [7]

$\beta$  é um elemento cujas potências são capazes de gerar todos os elementos diferentes de zero de  $\text{GF}(2^m)$ .

Resta agora introduzir uma propriedade abstrata estrutural dos corpos finitos. Com tal propósito, algumas provas não serão apresentadas por fugirem do objetivo inicial do estudo, contudo podem ser encontradas em sua totalidade em [17].

**Teorema:** O número de elementos  $q$  de um corpo finito corresponde a uma potência  $p^m$ , onde  $p$  é um número primo. Ou seja,  $q = p^m$ , com  $p$  primo. Para o caso dos corpos de Galois, tem-se  $p = 2$ , assim,  $q = 2^m$ .

## Capítulo 8

### 8.0 Wavelet sobre um corpo finito

Como já foi mencionado, o objetivo deste trabalho é de propor uma nova transformada em um corpo finito primo denominado de Corpo de Galois que possa substituir a Transformada Discreta de Fourier na geração do OFDM.

Em 1998, de Oliveira e colaboradores [deO *et al.* 98] propuseram um novo esquema de multiplex de alta eficiência espectral, adequado para canais de banda limitada, baseado em seqüências multiníveis definidas em corpo finito. A partir daí vários estudos têm sido feitos para procurar representações das transformadas clássicas contínuas, no corpo finito e estudar suas possíveis aplicações. [Gilson][João Paulo][Renato][Rodrigo]

Neste projeto, estamos, pela primeira vez, definindo uma **wavelet sobre um corpo finito primo**. Sua definição passa a ser um vetor de dimensão N mostrado a seguir:

$$\underline{\psi}_{1,0} = (\psi_{1,0}(0), \psi_{1,0}(1), \psi_{1,0}(2), \dots, \psi_{1,0}(N-1))$$

Onde cada  $\psi_{i,j}$  pertence ao corpo de extensão  $GF(p^5)$ .

Vamos iniciar com wavelets sobre um corpo  $GF(p)$ . Seja N um número inteiro e  $D(N)$  um conjunto dos divisores de N. Vimos em capítulos anteriores que nos estudos de wavelets, escalonamentos e translações são feitas sobre uma wavelet mãe. A wavelet mãe no corpo  $GF(p)$ , p primo, pode ser definida pelo vetor  $\underline{\psi}_{1,0}$  mostrado acima.

Resta entender como se comportam as operações de translação e escalonamento sobre um Campo de Galois.

Após muitos erros conseguimos propor as seguintes propriedades para as wavelets sobre um corpo finito:

1) Escalonamento:

$$\psi_{j,0}(i) = \psi_{1,0}(ji \pmod{p}) \text{ onde } j \text{ tem que pertencer a } D(N/2).$$

2) Translações e/ou Escalonamentos:

$$\psi_{j,k}(i) = \psi_{j,0}\left[\left(i + \frac{Nk}{j}\right) \pmod{N}\right], \text{ para todo } k=0,1,\dots,N-1.$$

Foi mencionado em capítulos passados que uma função para ser denominada wavelet tinha que ter seu valor médio nulo. No contínuo isto quer dizer que:

$$\int \psi(t) dt = 0$$

Ao definirmos as nossas funções wavelet sobre um corpo finito como sendo:

$$\underline{\psi}_{j,k} = (\psi_{j,k}(0), \psi_{j,k}(1), \psi_{j,k}(2), \dots, \psi_{j,k}(N-1))$$

Ficamos surpresos ao constatar que:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \psi_{j,k}(i) \equiv 0 \pmod{p}$$

Vimos então que tudo indicava estarmos seguindo na direção certa. Precisávamos definir a transformada Wavelet sobre um corpo finito e achar representações sobre o corpo finito das dezenas de wavelets mãe existentes no contínuo.

Definimos a transformada wavelet sobre um corpo finito (*FFWT – Finite Field Wavelet Transform*) de um sinal  $v$ , como sendo:

$$FFWT(j,k) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} v_i \psi_{j,k}(i) \pmod{p}$$

Como as seqüências possuem diferentes energias, é necessário normalizá-las para que comparações possam ser feitas. Definimos então o processo de normalização como o mostrado a seguir:

$$FFWT(j,k) = \frac{1}{\sqrt{\binom{N}{j} \pmod{p}}} \sum_{i=0}^{N-1} v_i \psi_{j,k}(i)$$

Quanto as representações das wavelets mãe sobre um corpo finito, iniciamos nossos estudos com a Wavelet mãe de Haar.

Assume-se que  $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$  (condição necessária para que  $\sqrt{2}$  exista neste corpo) e  $N$  é uma potência de 2. A wavelet de Haar, pode ser descrita como a seguinte:

$$\psi_{1,0}(i) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq \frac{i}{N} < \frac{1}{2} \\ p-1 & \text{if } \frac{1}{2} \leq \frac{i}{N} < 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como exemplo ilustrativo vamos supor o caso em que estamos no corpo  $GF(p)$  e  $N = 8$ . O número de divisores de  $N$ ,  $D(8)$ , será então  $\{1,2,4\}$ . Logo:

$$\underline{\psi}_{1,0} = (1, 1, 1, 1, p-1, p-1, p-1, p-1)$$

$$\underline{\psi}_{2,0} = (1, 1, p-1, p-1, 0, 0, 0, 0)$$

$$\underline{\psi}_{4,0} = (1, p-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Onde translações destas seqüências são permitidas, e.g.  $\underline{\psi}_{2,1} = (0,0,0,0,1,1, p-1, p-1)$

Vamos supor agora que estamos sobre GF(7) e N continua sendo 8. Temos à esquerda a wavelet de Haar e a direita a wavelet normalizada de Haar.

$$\begin{array}{ll}
 (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) & \underline{\psi}_{0,0} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\
 (1\ 1\ 1\ 1\ 6\ 6\ 6\ 6) & \underline{\psi}_{1,0} = (6, 6, 6, 6, 1, 1, 1, 1) \\
 (1\ 1\ 6\ 6\ 0\ 0\ 0\ 0) & \underline{\psi}_{2,0} = (4, 4, 3, 3, 0, 0, 0, 0) \\
 (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 6\ 6) & \underline{\psi}_{2,1} = (0, 0, 0, 0, 4, 4, 3, 3) \\
 (1\ 6\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) & \underline{\psi}_{4,0} = (5, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
 (0\ 0\ 1\ 6\ 0\ 0\ 0\ 0) & \underline{\psi}_{4,1} = (0, 0, 5, 2, 0, 0, 0, 0) \\
 (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 6\ 0\ 0) & \underline{\psi}_{4,2} = (0, 0, 0, 0, 5, 2, 0, 0) \\
 (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 6) & \underline{\psi}_{4,3} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 5, 2).
 \end{array}$$

Pode-se claramente ver que:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \psi_{j,k}(i) \equiv 0 \pmod{p} \quad \sum_{i=0}^{N-1} \psi_{j,k}(i) \psi_{j',k'}(i) \equiv 0 \pmod{p} \quad \sum_{i=0}^{N-1} \psi_{j,k}^2(i) \equiv 1 \pmod{p}$$

Logo nossas seqüências são, respectivamente, wavelets, ortogonais e normalizadas. Ao nos depararmos com esta descoberta vimos em nossas mãos uma poderosa ferramenta, pois ao escalonarmos e transladarmos uma wavelet mãe sobre um corpo finito, obtemos seqüências ortogonais entre si. Como possíveis investigações temos as aplicações em esquemas CDM/CDMA e sistemas que utilizem a modulação OFDM.

### 8.1 Aplicações em CDMA

Quando se fala em multiplexação digital, geralmente se refere ao TDM (*Time Division Multiplex*), porém, atualmente, CDM (*Code Division Multiplex*) tem sido largamente usado como sistema de modulação digital. Ao definirmos a Wavelet sobre um corpo finito, constatamos que as portadoras são ortogonais entre si. Propomos então um novo esquema, similar ao CDM/CDMA, baseado em Transformadas Wavelet sobre um Corpo Finito.

Nesse contexto, as versões escalonadas e transladadas correspondem às seqüências de espalhamento do CDM.[20][22] Considere a modulação de cada símbolo de entrada por uma versão da wavelet mãe. Assim, cada símbolo de duração T é codificado em uma seqüência de N *chips* de duração  $T_c = T / N$ . O aumento da taxa de sinalização espalha o espectro do sinal transmitido de um fator igual a N, o mesmo resultado visto em FDMA (*Frequency Division Multiple Access*) e TDMA (*Time Division Multiple Access*).

Vamos a um exemplo ilustrativo, mostrado na *figura 8*, de como estas versões podem ser usadas como seqüências de espalhamento num sistema CDMA.

Seja  $N=8$  o comprimento de nosso vetor wavelet mãe e, conseqüentemente, o numero de versões possíveis. Poderemos ter para uma wavelet mãe de comprimento **n**, exatamente **n** usuários, onde cada um será dado uma seqüência de espalhamento. No exemplo estamos no corpo GF(7).

Teremos então N usuários onde cada um deles é dado uma seqüência de espalhamento. O operador  $\boxplus$  corresponde à soma convencional termo-a-termo módulo p.

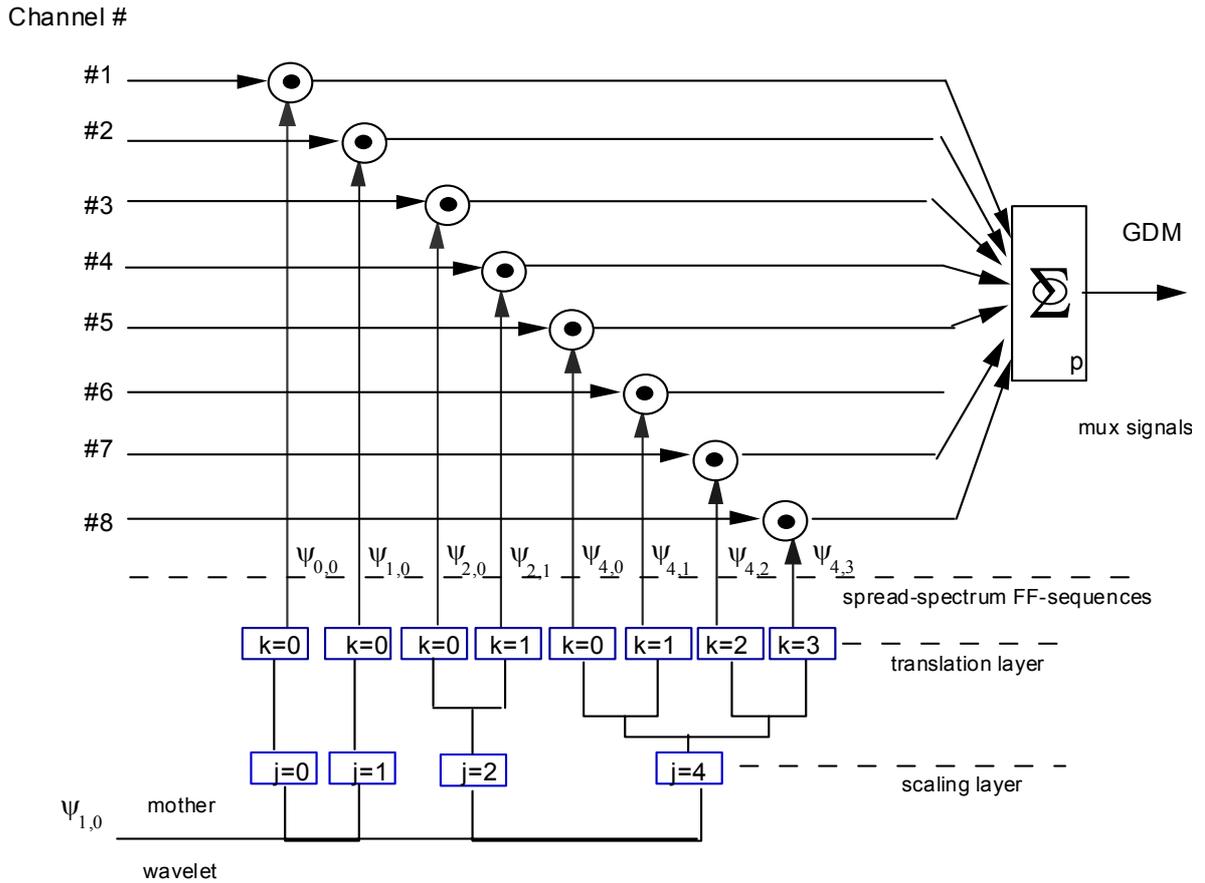


Figura 8 – Novo esquema proposto de espalhamento espectral aplicado ao CDMA

Supondo que o usuário #3 queira transmitir um número pertencente ao GF(7). Digamos um 2, ou melhor um (2 2 2 2 2 2 2 2). Pode-se ver na Figura 8 que o usuário #3 está recebendo como seqüência de espalhamento a versão  $\psi_{2,0} = (4 4 3 3 0 0 0 0)$ .

O sinal espalhado resultante será dado por:

$$(2 2 2 2 2 2 2 2) \otimes (4 4 3 3 0 0 0 0) \equiv (11 6 6 0 0 0 0) \pmod{7}$$

Por simplicidade usaremos como notação a seguinte:

$$2^8 \otimes 4^2 3^2 0^4 \equiv 1^2 6^2 0^4 \pmod{7}$$

Analisando agora um caso mais completo. Supondo que os todos os oito usuários estão enviando, num determinado instante de tempo, as seguintes informações: (3 0 2 1 6 5 5 4).

O vetor seqüência de espalhamento é dada por:

$$(\psi_{0,0}, \psi_{1,0}, \psi_{2,0}, \psi_{2,1}, \psi_{4,0}, \psi_{4,1}, \psi_{4,2}, \psi_{4,3})$$

O vetor espalhado será dado por:

$$R = 3^8 \oplus 0^8 \oplus 1^2 6^2 0^4 \oplus 0^4 4^2 3^2 \oplus 2^1 5^1 0^6 \oplus 0^2 4^1 3^1 0^4 \oplus 0^4 4^1 3^1 0^2 \oplus 0^6 6^1 1^1 \equiv (6 2 6 5 4 3 5 0) \pmod{7}.$$

Como as versões são ortogonais, os dados de cada usuário podem ser facilmente recuperados usando o produto interno sobre  $GF(p)$ . Usando como exemplo o usuário #3 e o usuário #8:

No receptor:

$$\#3 : \langle R, \psi_{2,0} \rangle \equiv 2 \pmod{7}$$

$$\#8 : \langle R, \psi_{4,3} \rangle \equiv 4 \pmod{7}$$

O sistema tem que ter uma perfeita sincronia entre as portadoras usadas no Multiplexador e no demultiplexador. Tudo indica que este sistema seja mais eficiente devido ao fato de todas as seqüências de espalhamento serem versões de uma mesma wavelet mãe, portanto, podem ser geradas a partir de um único *clock*, por escalonamentos e translações. O que nos resta fazer é desenvolver uma eficiente expansão de alfabetos, para que este sistema possa sair do papel e ser aplicado na prática. Estudos recentes mostram uma eficiente expansão de alfabetos para a Transformada de Fourier sobre um Corpo Finito. [18]

## 8.2 Aplicações em ADSL/HDTV

Como mostrado no capítulo 2, o sistema multiportadoras OFDM apresenta desempenho superior ao sistema de multiplex clássico FDM pelo fato de utilizar portadoras ortogonais entre si, a despeito da superposição espectral. Foi mostrado nos capítulos 3 e 4, respectivamente, como empregar tecnologias ADSL e HDTV com o uso modulação ortogonal, tornando estes sistemas eficientes.

O número de aplicações da técnica OFDM vem crescendo dia a dia e novas versões derivadas do sistema OFDM clássico vem surgindo. Como tais sistemas são baseados na transformada discreta (DFT), outras versões de transformadas discretas foram adaptadas para OFDM. Entretanto, todas as transformadas discretas utilizadas até agora são versões discretas de transformadas contínuas. O principal intuito deste trabalho foi iniciar uma investigação sobre a possibilidade de adaptar transformadas definidas em estruturas de corpo finito (transformadas digitais), no contexto de OFDM. Em particular, as transformadas de wavelet têm se mostrado uma ferramenta extremamente potente em muitas aplicações que anteriormente envolviam a transformada de Fourier. Sistemas OFDM baseados em wavelets foram recentemente introduzidos. Este fato estimulou a definição de novas wavelets sobre um corpo finito.

No sistema proposto, mostrou-se possível, através de fáceis translações e escalonamentos de uma wavelet-mãe sobre um corpo finito  $GF(p)$ , a geração de portadoras ortogonais entre si. Esta primeira parte da investigação possibilitou a introdução de novas transformadas com propriedades de ortogonalidade que aparentam ser adequadas aos sistemas multiportadora.

## 8.3 Conclusões

Numa primeira análise, o sistema proposto indica ser uma versão totalmente digital e mais eficiente (espectralmente) da modulação OFDM. Tudo indica que possa, também, ser aplicado com sucesso em novas versões de modems ADSL e HDTV digital. Este tópico não foi muito abordado em profundidade, pois, na prática, as simulações requerem sistemas digitais binários e não sobre um corpo finito primo (ou mesmo um corpo de extensão). Recentemente o mestrando João Paulo Cruz Miranda

propôs em sua dissertação [18] uma eficiente expansão de alfabeto, possibilitando a “codificação” de sinais sobre um corpo finito para binário. Esta operação, denominada de transcodificação de alfabetos, deve desempenhar um papel importante nas aplicações práticas de sistemas OFDM com base em transformadas sobre corpos finitos. Com esta ferramenta em mãos, muito poderá ser feito. O principal problema aberto consiste em investigar os espectros obtidos para o OFDM em corpo finito e suas possíveis implementações (algoritmos rápidos etc.). O Departamento de Eletrônica e Sistemas adquiriu recentemente o aplicativo *Matlab 6.0*<sup>®</sup> e o *software* de simulação *SystemView*. Serão dois recursos necessários para a simulação destes novos sistemas propostos, para que comparações possam ser feitas com os já existentes. Muito resta por fazer para viabilizar a aplicação prática desta técnica em sistemas práticos. Os primeiros resultados obtidos neste trabalho permitem uma visão mais otimista para enfrentar este desafio.

## Apêndice A

---

### **Dificuldades encontradas**

Tivemos como dificuldade na elaboração deste trabalho o fato de que, ao iniciarmos os estudos sobre corpos finitos, não se encontrou um acervo bibliográfico adaptado mais ao tema. A bibliografia disponível apresenta um tratamento muito formal, fugindo ao escopo do trabalho desenvolvido. Quanto aos estudos sobre wavelets vários livros foram encontrados no Departamento de Matemática (UFPE) e na Web, porém tratando de wavelets sobre um corpo finito, não há livro algum que sequer comente sobre esse tema. A razão disto é que este novo esquema foi recentemente proposto por de Oliveira *et alli*, professor e orientador do Departamento de Eletrônica e Sistemas – CTG.

Como as reuniões com o orientador são praticamente semanais e o contato com bolsistas de mestrado é constante, o que poderia se tornar numa tremenda dificuldade terminou se tornando num desafio.

Outro fator que não possibilitou um avanço maior nos estudos foi o fato de não termos a disposição *softwares* eficientes de simulação, tornando impossível a comparação do sistema proposto com os já existentes no mercado. Este problema será resolvido em breve, pois o Departamento de Eletrônica e Sistemas adquiriu novos lançamentos de *softwares* de simulação.

### **Atividades Paralelas Desenvolvidas Pelo Bolsista**

#### **Artigos Publicados/ Trabalhos Apresentados:**

**On Wavelet Decomposition over Finite Fields.** XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Fortaleza, 03-06 de setembro de 2001.

**Decomposição de Haar em Corpos Finitos.** VIII Congresso de Iniciação Científica, Recife, Outubro de 2000.

## Anexo I

### Teorema da Amostragem:

Seja um sinal  $f(t)$  cuja transformada de Fourier  $F(\omega)$  é tal que:  $F(\omega) = 0$ , para  $|\omega| \geq \omega_c$ .

Se  $|\omega| < \omega_c$ ,  $F(\omega)$  pode ser representado por:

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-jn\left(\frac{\pi}{\omega_c}\right)\omega}$$

Onde:

$$f_n = \frac{1}{2\omega_c} \cdot \int_{-\omega_c}^{\omega_c} F(\omega) \cdot e^{jn\left(\frac{\pi}{\omega_c}\right)\omega} d\omega$$

Como  $F(\omega) = 0$  para  $|\omega| \geq \omega_c$ , ficamos com:

$$f_n = \frac{1}{2\omega_c} \cdot \frac{2\pi}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} F(\omega) \cdot e^{jn\left(\frac{\pi}{\omega_c}\right)\omega} d\omega$$
$$\therefore f_n = \frac{\pi}{\omega_c} \cdot f\left(n \frac{\pi}{\omega_c}\right)$$

Teremos então a seguinte característica espectral:

$$F(\omega) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_c} \cdot f\left(n \frac{\pi}{\omega_c}\right) \cdot e^{-jn\left(\frac{\pi}{\omega_c}\right)\omega}, & \text{para } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{para } |\omega| \geq \omega_c \end{cases}$$

Sua transformada inversa de Fourier será:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_c}^{\omega_c} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n \frac{\pi}{\omega_c}\right) \cdot \frac{1}{2\omega_c} \cdot \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j[t-n\left(\frac{\pi}{\omega_c}\right)]\omega} d\omega$$

$$\therefore f(t) = f\left(n \frac{\pi}{\omega_c}\right) \cdot \frac{\sin \omega_c \cdot (t - n\pi/\omega_c)}{\omega_c \cdot (t - n\pi/\omega_c)}$$

## Bibliografia

---

- [1] Balieiro, Silvia. **Banda Larga nas Escolas**. Revista Info Exame, ano 16, no. 178, pp. 72-73, 2001.
- [2] Bingham, John A. C., **The Theory and Practice of Modem Design**, Wiley-Interscience Publication, CA, 1988.
- [3] Bohdanowicz A., Bos C., Ditzel, M., Serdijin, W., Janseen, G., Deprettere, Ed. **Wireless Link using OFDM Modulation: Performance Prediction, Modeling and Implementation**. Delft University of Technology, 1998.
- [4] C. Valens, **A Really Friendly Guide to Wavelets**, 1999.
- [5] Coelho, Fabiana. **Televisão Digital: a Anatel dá mais um tempo**. Revista TELECOM, no. 143, p. 41, 2000.
- [6] Costa, Max H. M., Arantes, Dalton S. **Televisão de Alta Definição**. Boletim Bimestral da Sociedade Brasileira de Telecomunicações, no.5, pp.1-4, 2000.
- [7] de Oliveira, Severini Gilson. **Novos Sistemas de Acesso Múltiplo Baseados em Transformadas em Corpo Finito**. Iniciação científica da Universidade Federal de Pernambuco, 2000.
- [8] Deller, J.R. **Tom, Dick and Mary Discover the DFT**. *The story of three students' discovery of the relationship between continuous and discrete transforms*. IEEE Signal Processing Magazine, Abril 1994, pp.36-49.
- [9] Edfors, Ove, Sandell, Magnus, Sjöberg, Frank, Landström, Daniel. **An Introduction to OFDM**. Lulea University of Technology, 1996.
- [10] Graps, Amara, **An Introduction to Wavelets**. Stanford University, 1999.
- [11] Grego, Maurício. **10 Verdades e Mentiras sobre Banda Larga**. Revista Info Exame, ano 16, no. 180, pp. 66-67, 2001.
- [12] Iano, Yuzo, Mendes, Luiz Rômulo, Chiquito, José Geraldo, Fasolo, Sandro. **Sistema de Modulação para Transmissão de HDTV**. Revista Científica Periódica/Revista do Instituto Nacional de Telecomunicações, Vol. 3, no. 1, pp. 42-54, 2000.
- [13] Iano, Yuzo, Mendes, Luiz Rômulo, Nalon, José Alexandre, Sablón, V.I.B. **Televisão Digital de Alta Definição**. Revista Científica Periódica/Revista do Instituto Nacional de Telecomunicações, Vol. 3, no. 1, pp. 1-9, 2000.
- [14] Kamen, Edward W. e Heck, Bonnie S. **Fundamentals of Signals and Systems Using Matlab**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1997.

- [15]Lipschutz, **Álgebra Linear**, 52a Edição, 1972.
- [16]Magalhães, Leonardo Magno. **Wavelets e a Tecnologia DSL**. Universidade Federal da Bahia, 1998.
- [17]McEliece, R. J. **Finite Fields for Computer Scientists and Engineers**, Ed. Kluwer Ac. Pub., 1987.
- [18]Miranda, João Paulo. **Multiplexação Digital e Acesso Múltiplo Baseados em Transformada de Corpo Finito**. Mestrado em Comunicações da Universidade Federal de Pernambuco, 2001.
- [19]Nery, Carmen Lúcia. **Os usuários Aprovam a Nova Internet Mais Larga e Generosa**. Revista Informática Hoje, ano 15, no. 493, p. 19, 2000.
- [20]Oliveira, H.M; Miranda, J.P e Souza, Ricardo Campello. **Spread Spectrum Based on Finite Field Fourier Transforms**. Universidade Federal de Pernambuco, 2001.
- [21]Oliver, B.M; Pierce J.R; Shannon, C.E. **The Philosophy of PCM**. IEEE Transactions, Vol.36, pp 1324-1331, Nov. 1948.
- [22]Pickholtz, R.L; Schilling, D.L; Milstein, L.B. **Theory of Spread-Spectrum Communications - A Tutorial**. IEEE Transactions on Communications, Vol. Com-30, no.5, Maio 1982.
- [23]Polikar, Robi, **The Wavelet tutorial – Fundamental Concepts & an Overview of the Wavelet Theory**. Iowa State University, 1998.
- [24]Scharwtz, Mischa, **Transmissão de Informação, Modulação e Ruído**, Ed. Guanabara Dois, RJ, 1979.
- [25]Távora, Rodrigo Gurgel. **Algoritmos Rápidos para Transformadas em Corpos Finitos**. Mestrado em Telecomunicações da Universidade Federal de Pernambuco, 2001. Tese MS.
- [26]Weinstein, S.B. **Data Transmission by Frequency Division Multiplexing Using the Discrete Fourier Transform**. IEEE Transactions on Communication Technology, Vol.19, no. 5, Outubro 1971.